ÜBUNGSBUCH

ZUM STUDIUM DER

HÖHEREN ANALYSIS

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,
K. SÄCHS. GEHEIMER RAT.

ZWEITER TEIL:

AUFGABEN AUS DER INTEGRALRECHNUNG.

VIERTE AUFLAGE.

BEARBEITET VON

PROF. DR. R. HENKE,
KONREKTOR AM ANNEN-REALGYMNASIUM ZU DRESDEN.

MIT HOLZSCHNITTEN IM TEXTE.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Druck von B G. Teubner in Dresden.

Vorwort zur ersten Auflage.

Da ich in der Vorrede zum ersten Theile des vorliegenden Werkes mich hinreichend über dessen Zweck ausgesprochen habe, so bedarf es nur weniger Worte zur Einführung des zweiten Theiles. Die Aufgaben des ersten Capitels enthalten zwar nichts Neues, aber sie bilden nun einmal das unentbehrliche Handwerkszeug der Integralrechnung und konnten daher nicht wegbleiben. In den übrigen Capiteln dagegen wird man fast durchaus neue Beispiele finden und zwar nur solche, die zu eleganten Resultaten führen und dadurch das Interesse der Studirenden wach erhalten. Aus dem letzteren Grunde habe ich auch die meisten Beispiele zur Integration von Differentialgleichungen in das Gewand geometrischer Aufgaben gekleidet.

Dresden, im Mai 1870.

Schlömilch.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Da kein Grund zu bedeutenden Aenderungen des Textes vorlag, so habe ich mich bei der zweiten Auflage darauf beschränkt, fast jedes Capitel durch neue Beispiele zu bereichern.

Dresden, im Juli 1874.

Schlömilch.

Vorwort zur dritten Auflage.

Auch in der vorliegenden Auflage habe ich das Princip festgehalten, dass mein Buch keine grösseren Theorien entwickeln, sondern dem Studirenden ein Hilfsmittel zur Einübung des Technischen der Integralrechnung bieten soll. Daher unterscheidet sich die dritte Auflage nur dadurch von ihrer Vorgängerin, dass sie in mehreren Capiteln neue und, wie ich hoffe, interessante Aufgaben bringt.

Dresden, im Februar 1882.

Schlömilch.

Vorwort zur vierten Auflage.

Im Auftrage des Herrn Verfassers habe ich die vorliegende vierte Auflage des rühmlich bekannten und vielfach verbreiteten Übungsbuches bearbeitet.

Wenn sich nach 18 Jahren wiederum eine neue Auflage nötig machte, obschon an ähnlichen Werken in der in- und ausländischen Litteratur jetzt kein Mangel mehr ist, so bezeugt dieser Umstand wohl am deutlichsten die praktische Brauchbarkeit des Buches. Es konnte daher nicht meine Absicht sein, die Anlage und den Plan der Sammlung, die fast ausschliesslich Aufgaben in geometrischer Einkleidung enthält, durchgreifend zu ändern und ebensowenig hielt ich mich für befugt, von dem ausserordentlich reichhaltigen und vielseitigen Inhalte etwas Wesentliches zu unterdrücken, obwohl manche Partieen vielleicht eine etwas kürzere Behandlung vertrügen. Dagegen lag mir ob, in Übereinstimmung mit den Wünschen der Verlagsbuchhandlung einiges Fehlende einzufügen, und dann habe ich mich bemüht, dem Anfänger die Handhabung des Mechanismus der Integralrechnung womöglich noch zu erleichtern.

Demgemäss sind die in §§ 2 bis 5 und in § 7 enthaltenen Anweisungen zur unbestimmten Integration mehrfach abgeändert und durch zahlreichere Beispiele erläutert worden. Am Ende von Kap. I habe ich den früheren § 19 als § 10 angehängt, in dem einfache bestimmte Integrale behandelt werden, deren Auswertung sich aus unbestimmten Integralen ergiebt. Damit war die Möglichkeit geboten, die Aufgaben in Kap. II und III als Anwendungen bestimmter Integrale erscheinen zu lassen. Das neue Kap. IV enthält Aufgaben zur Berechnung von statischen und Trägheitsmomenten in rein geometrischem Sinne. Die früheren Kap. IV und Kap. V sind als Kap. V zusammengezogen und diesem in § 26 einige einfache Beispiele zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale angefügt worden. In §§ 38 und 39 habe ich die angenäherte Darstellung von Funktionen in gegebenem Intervalle durch einfachere Funktionen als

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate behandelt. Dem Kap. IX ist als Einleitung § 40 vorangestellt worden, der die Integration vollständiger Differentiale von Funktionen zweier Variabeln und die Aufsuchung des integrierenden Faktors in einfachen Fällen, enthält. In § 49 erhielten die Regeln über die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung eine andere Fassung und die Beispiele wurden vermehrt.

Neue Aufgaben aus naturwissenschaftlichen und technischen Gebieten, deren Behandlung nicht im Plane des Buches gelegen hat, sind nicht aufgenommen worden. Auch auf weitergehende Übungen in rein mathematischen Disziplinen, wie namentlich in der Integration von Differentialgleichungen, musste ich verzichten, um den Umfang des Buches nicht noch weiter anwachsen zu lassen und konnte es, weil hier Übungsmaterial in Spezialwerken reichlich vorhanden ist.

Dresden, im Juli 1900.

R. Henke.

Inhalt.

Kapitel I.

Integration von entwickelten Funktionen einer Variabeln.

Kapitel II.

Quadraturen und Rektifikationen.

Kapitel III.

Kubaturen und Komplanationen.

Kapitel IV.

Statische und Trägheitsmomente.

Kapitel V.

Einfache bestimmte Integrale.

Kapitel VI.

Die Doppelintegrale und ihre geometrischen Anwendungen.

Kapitel VII.

Die dreifachen Integrale.

Kapitel VIII.

Mittelwerte und Näherungsformeln für gegebene Funktionen.

Kapitel IX.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

Kapitel X.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Kapitel I.

Integration von entwickelten Funktionen einer Variabeln.

§ 1.

Grundformeln und allgemeine Regeln.

1. Für die unbestimmte Integration der einfachsten Funktionen gelten die nachstehenden Grundformeln:

1) $$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + Const., \qquad \mu \gtrless -1.$$

2) $$\int \frac{1}{x}\,dx = lx + Const.$$

3) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + Const.$$

4) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + Const.$$

5) $$\int e^x dx = e^x + Const.$$

6) $$\int \cos x\,dx = \sin x + Const.$$

7) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + Const.$$

8) $$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + Const.$$

9) $$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + Const.$$

2. Sind α, β, γ etc. konstante Grössen, u, v, w etc. Funktionen einer und derselben Variabeln x, so geschieht die Integration des Aggregates $\alpha u + \beta v + \gamma w + \cdots$ durch Zerlegung nach der Regel

$$\int(\alpha u + \beta v + \gamma w + \cdots)\,dx = \alpha\int u\,dx + \beta\int v\,dx + \gamma\int w\,dx + \cdots$$

Im Fall die Anzahl der Summanden unendlich gross wird, bedarf es einer besonderen Untersuchung über die Giltigkeit dieser Formel.

3. Man kann oft ein Integral vereinfachen durch partielle Integration, indem man die Formel anwendet

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Das Verfahren führt sofort zum Ziele, wenn $\int v\,du$ einfacher ist als $\int u\,dv$.

4. Das am häufigsten anzuwendende Hilfsmittel zur Berechnung eines Integrals ist die Einführung einer neuen Variabeln. Hat nämlich ein Integral die Form

$$\int f[\varphi(x)]\,dx,$$

so setzt man

$$\varphi(x) = y,$$

löst diese Gleichung nach x auf, wodurch ein Resultat von der Form

$$x = \psi(y)$$

entsteht, und betrachtet nun y als neue unabhängige Variable; es ist dann

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = \int f[y]\,\psi'(y)\,dy.$$

Nach Ausführung der auf y bezüglichen Integration hat man für y wieder $\varphi(x)$ einzusetzen.

5. Durch Anwendung dieser Hilfsmittel gelingt es nicht selten, ein Integral direkt auf eine der Grundformeln in Nr. 1, oder wenigstens durch eine Reduktions- oder Rekursionsformel auf ein einfacheres zurückzuführen.

§ 2.

Integration rationaler Funktionen.

1. Führt man $a + bx = y$ als neue Variable ein, so erhält man

$$\int (a+bx)^{\mu}\,dx = \frac{1}{b}\int y^{\mu}\,dy = \frac{y^{\mu+1}}{(\mu+1)b}$$
$$= \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}, \quad \mu \gtrless -1,$$

wobei der Kürze wegen die Integrationskonstante weggelassen ist, was im folgenden immer geschehen wird.

2. Die nämliche Substitution giebt

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\,l(a+bx).$$

3. Das allgemeinere Integral

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx)^n}$$

lässt sich mittels derselben Substitution finden, sobald m eine ganze positive Zahl ist. Man erhält zunächst

$$\frac{1}{b^{m+1}}\int \frac{(y-a)^m}{y^n}\,dy;$$

man entwickelt nun $(y-a)^m$ nach dem binomischen Satze und integriert durch Zerlegung.

Hiernach ergeben sich z. B. folgende Formeln, worin immer $y = a + bx$ zu nehmen ist:

$$\int \frac{x}{y}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(y - aly\right),$$

$$\int \frac{x^2}{y}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 2ay + a^2ly\right),$$

$$\int \frac{x^3}{y}\,dx = \frac{1}{b^4}\left(\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{3}{2}ay^2 + 3a^2y - a^3ly\right),$$

$$\int \frac{x}{y^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(ly + \frac{a}{y}\right),$$

$$\int \frac{x^2}{y^2}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(y - 2aly - \frac{a^2}{y}\right),$$

$$\int \frac{x^3}{y^2}\,dx = \frac{1}{b^4}\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3ay + 3a^2ly + \frac{a^3}{y}\right),$$

$$\int \frac{x}{y^3}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(-\frac{1}{y} + \frac{a}{2y^2}\right),$$

$$\int \frac{x^2}{y^3}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(ly + \frac{2a}{y} - \frac{a^2}{2y^2}\right),$$

$$\int \frac{x^3}{y^3}\,dx = \frac{1}{b^4}\left(y - 3aly - \frac{3a^2}{y} + \frac{a^3}{2y^2}\right),$$

$$\int \frac{x}{y^4}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(-\frac{1}{2y^2} + \frac{a}{3y^3}\right),$$

$$\int \frac{x^2}{y^4}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(-\frac{1}{y} + \frac{a}{y^2} - \frac{a^2}{3y^3}\right),$$

$$\int \frac{x^3}{y^4}\,dx = \frac{1}{b^4}\left(ly + \frac{3a}{y} - \frac{3a^2}{2y^2} + \frac{a^3}{3y^3}\right).$$

4. Unter der Voraussetzung ganzer positiver m und n kann das Integral

$$\int \frac{dx}{x^m (a + bx)^n}$$

mittels der Substitution

$$\frac{a}{x} + b = z$$

berechnet werden. Dasselbe geht zunächst über in

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}\, dz,$$

und hier entwickelt man $(z-b)^{m+n-2}$ nach dem binomischen Satze und integriert die einzelnen Summanden. Wird zu blosser Abkürzung

$$y = a + bx$$

gesetzt, so ergeben sich nachstehende Formeln:

$$\int \frac{dx}{xy} = -\frac{1}{a} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 y} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3 y} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{xy^2} = \frac{1}{ay} - \frac{1}{a^2} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 y^2} = -\frac{b}{a^2 y} - \frac{1}{a^2 x} + \frac{2b}{a^3} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3 y^2} = \frac{b^2}{a^3 y} - \frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{2b}{a^3 x} - \frac{3b^2}{a^4} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{xy^3} = \frac{1}{2ay^2} + \frac{1}{a^2 y} - \frac{1}{a^3} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 y^3} = -\frac{b}{2a^2 y^2} - \frac{2b}{a^3 y} - \frac{1}{a^3 x} + \frac{3b}{a^4} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3 y^3} = \frac{b^2}{2a^3 y^2} + \frac{3b^2}{a^4 y} - \frac{1}{2a^3 x^2} + \frac{3b}{a^4 x} - \frac{6b^2}{a^5} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{xy^4} = \frac{1}{3ay^3} + \frac{1}{2a^2y^2} + \frac{1}{a^3y} - \frac{1}{a^4} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2y^4} = -\frac{b}{3a^2y^3} - \frac{b}{a^3y^2} - \frac{3b}{a^4y} - \frac{1}{a^4x} + \frac{4b}{a^5} l\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3y^4} = \frac{b^2}{3a^3y^3} + \frac{3b^2}{2a^4y^2} + \frac{6b^2}{a^5y} - \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{4b}{a^5x} - \frac{10b^2}{a^6} l\left(\frac{y}{x}\right).$$

5. Das Integral
$$\int \frac{dx}{a + cx^2}$$
lässt sich je nach den Vorzeichen von a und c auf die beiden Formen bringen:

$$\text{I.} \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2}, \quad \text{II.} \int \frac{dx}{\alpha^2 - x^2} \text{ oder } \int \frac{dx}{x^2 - \alpha^2}.$$

I. Durch die Substitution $x = \alpha y$ erhält man:

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctan} y = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctan} \frac{x}{\alpha}.$$

II. Beachtet man, dass

$$\frac{1}{\alpha^2 - x^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha + x} + \frac{1}{\alpha - x}\right)$$

ist, so enthält man durch Zerlegung:

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 - x^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\int \frac{dx}{\alpha + x} + \int \frac{dx}{\alpha - x}\right) = \frac{1}{2\alpha} l\left(\frac{\alpha + x}{\alpha - x}\right).$$

Ebenso ist
$$\frac{1}{x^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x + \alpha}\right),$$

also:
$$\int \frac{dx}{x^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} l\left(\frac{x - \alpha}{x + \alpha}\right).$$

Z. B.
$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right).$$

6. Ist in
$$\int \frac{x^m dx}{a + cx^2},$$

I. m eine ungerade Zahl $= 2k + 1$, so setze man $x^2 = t$, $x\,dx = \frac{1}{2}dt$; dadurch erhält man:

$$\int \frac{x^{2k+1}\,dx}{a + cx^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^k\,dt}{a + ct},$$

welches Integral sich nach Nr. 3 berechnen lässt. Z. B.

$$\int \frac{x^5\,dx}{1 - x^2} = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}l(1 - x^2).$$

II. Ist m eine gerade Zahl, so hat man durch Zerlegung:

$$\int \frac{x^m\,dx}{a + cx^2} = \frac{1}{c}\int x^{m-2}\left(1 - \frac{a}{a + cx^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^{m-1}}{(m-1)c} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{a + cx^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reduktionsformel führt man das Integral auf Nr. 5 zurück. Z. B.

$$\int \frac{x^6\,dx}{1 + x^2} = \tfrac{1}{5}x^5 - \int \frac{x^4\,dx}{1 + x^2},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{1 + x^2} = \tfrac{1}{3}x^3 - \int \frac{x^2\,dx}{1 + x^2},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{1 + x^2} = x - \int \frac{dx}{1 + x^2} = x - \operatorname{arctan} x,$$

also

$$\int \frac{x^6\,dx}{1 + x^2} = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + x - \operatorname{arctan} x.$$

III. Das Integral

$$\int \frac{dx}{x^m(a + cx^2)}$$

kann entweder durch die Substitution $y = \dfrac{1}{x}$ auf das vorige zurückgeführt, oder mittels der Reduktionsformel

$$\int \frac{dx}{x^m(a + cx^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^m}\left(1 - \frac{cx^2}{a + cx^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\,a x^{m-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{dx}{x^{m-2}(a + cx^2)}$$

gefunden werden.

Z. B.
$$\int\frac{dx}{x^6(1-x^2)}=-\frac{1}{5x^5}+\int\frac{dx}{x^4(1-x^2)},$$
$$\int\frac{dx}{x^4(1-x^2)}=-\frac{1}{3x^3}+\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)},$$
$$\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=-\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$
also durch Addition der drei Gleichungen:
$$\int\frac{dx}{x^6(1-x^2)}=-\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

7. Auf
$$\int\frac{dx}{(a+cx^2)^n}$$
kann man die Regel der partiellen Integration anwenden, indem man
$$u=(a+cx^2)^{-n},\quad v=x$$
annimmt. Dann ergiebt sich:
$$\int\frac{dx}{(a+cx^2)^n}=\frac{x}{(a+cx^2)^n}+2n\int\frac{cx^2dx}{(a+cx^2)^{n+1}}$$
$$=\frac{x}{(a+cx^2)^n}+2n\int\frac{(a+cx^2)-a}{(a+cx^2)^{n+1}}dx$$
$$=\frac{x}{(a+cx^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(a+cx^2)^n}-2na\int\frac{dx}{(a+cx)^{n+1}}.$$

Hier ist das erste Integral rechts mit dem links stehenden identisch; das zweite rechts ist weniger einfach, also erhält man, wenn man dieses aus der Gleichung bestimmt, die Reduktionsformel:
$$\int\frac{dx}{(a+cx^2)^{n+1}}=\frac{x}{2na(a+cx^2)^n}+\frac{2n-1}{2na}\int\frac{dx}{(a+cx^2)^n},$$
oder wenn man $n-1$ statt n schreibt:
$$\int\frac{dx}{(a+cx^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a(a+cx^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a}\int\frac{dx}{(a+cx^2)^{n-1}}.$$

Z. B.
$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}=\frac{x}{8(1+x^2)^4}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{(1+x^2)^4},$$
$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{x}{6(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(1+x^2)^3},$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2} \operatorname{arctan} x,$$

also

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^5} = \frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{7x}{8\cdot 6(1+x^2)^3} + \frac{7\cdot 5x}{8\cdot 6\cdot 4(1+x^2)^2} + \frac{7\cdot 5\cdot 3x}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2(1+x^2)} + \frac{7\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} \operatorname{arctan} x.$$

8. Ist

$$\int \frac{x^m dx}{(a+cx^2)^n}$$

zu bestimmen, so verfährt man, wenn m ungerade ist, nach Nr. 6, I. Wenn m gerade ist, so kann man eine Reduktionsformel herstellen, indem man

$$x^m = \frac{1}{c} x^{m-2}[(a+cx^2) - a]$$

setzt und durch Zerlegung erhält:

$$\int \frac{x^m dx}{(a+cx^2)^n} = \frac{1}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a+cx^2)^{n-1}} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a+cx^2)^n}.$$

Schreibt man für das erste Integral rechts

$$\int \frac{x^{m-2}dx}{(a+cx^2)^{n-1}} = \frac{1}{m-1}\int \frac{d(x^{m-1})}{(a+cx^2)^{n-1}},$$

so findet man durch partielle Integration:

$$\int \frac{x^{m-2}dx}{(a+cx^2)^{n-1}} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)(a+cx^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)c}{m-1}\int \frac{x^m dx}{(a+cx^2)^n},$$

also ist

$$\int \frac{x^m dx}{(a+cx^2)^n} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)c(a+cx^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)}{m-1}\int \frac{x^m dx}{(a+cx^2)^n} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a+cx^2)^n}.$$

Vereinigt man das erste Integral rechts mit dem links stehenden, so erhält man die Reduktionsformel:

$$\int \frac{x^m dx}{(a+cx^2)^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)c(a+cx^2)^{n-1}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m-1)c}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a+cx^2)^n},$$

deren wiederholte Anwendung das Integral auf Nr. 7 zurückführt. Unter Rücksicht auf die Reduktion des Integrals

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{2az} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{z}, \quad z = a + cx^2,$$

ergeben sich die Formeln:

$$\int \frac{x^2}{z^2} dx = -\frac{x}{2cz} + \frac{1}{2c}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4}{z^2} dx = \frac{x}{c^2} + \frac{ax}{2c^2 z} - \frac{3a}{2c^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6}{z^2} dx = \frac{x^3}{3c^2} - \frac{2ax}{c^3} - \frac{a^2 x}{2c^3 z} + \frac{5a^2}{3c^3}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^2}{z^3} dx = -\frac{x}{4cz^2} + \frac{x}{8acz} + \frac{1}{8ac}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4}{z^3} dx = \frac{ax}{4c^2 z^2} - \frac{5x}{8c^2 z} + \frac{3}{8c^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6}{z^3} dx = -\frac{a^2 x}{4c^3 z^2} + \frac{9ax}{8c^3 z} + \frac{x}{c^3} - \frac{15a}{8c^3}\int \frac{dx}{z}.$$

9. Ist in

$$\int \frac{dx}{a + bx + x^2}$$

I. der Nenner $a + bx + x^2$ ein vollständiges Quadrat, also $a = \frac{1}{4}b^2$, so hat man:

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{4}b^2 + bx + x^2} = \int \frac{d(\frac{1}{2}b + x)}{(\frac{1}{2}b + x)^2} = -\frac{2}{b + 2x}.$$

Ist $a \gtrless \frac{1}{4}b^2$, so kann man schreiben:

$$a + bx + x^2 = a - \tfrac{1}{4}b^2 + (\tfrac{1}{2}b + x)^2.$$

II. Ist

$$a > \tfrac{1}{4}b^2, \quad a - \tfrac{1}{4}b^2 = \alpha^2, \quad \tfrac{1}{2}b + x = t,$$

so hat man

$$\int \frac{dx}{a + bx + x^2} = \int \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{t}{\alpha}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4a - b^2}} \arctan \frac{b + 2x}{\sqrt{4a - b^2}}.$$

III. Ist

$$a < \tfrac{1}{4} b^2, \quad \tfrac{1}{4} b^2 - a = \alpha^2, \quad \tfrac{1}{2} b + x = t,$$

so ergiebt sich:

$$\int \frac{dx}{a + bx + x^2} = \int \frac{dt}{t^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} l \left(\frac{t - \alpha}{t + \alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4a}} l \left(\frac{b + 2x - \sqrt{b^2 - 4a}}{b + 2x + \sqrt{b^2 - 4a}}\right).$$

Im Falle III hat die Gleichung $a + bx + x^2 = 0$ zwei reelle Wurzeln x_1 und x_2, es ist also auch:

$$\int \frac{dx}{a + bx + x^2} = \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)}$$
$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \int \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{x_1 - x_2} l \left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

Beispiele.

$$\int \frac{dx}{9 + 6x + x^2} = -\frac{1}{3 + x},$$

$$\int \frac{dx}{16 - 8x + x^2} = \frac{1}{4 - x},$$

$$\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1 + 2x}{\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{dx}{1 - x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{dx}{17 - 8x + x^2} = \arctan (x - 4),$$

$$\int \frac{dx}{-1 + 4x + x^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} l \left(\frac{2 + x - \sqrt{5}}{2 + x + \sqrt{5}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{-1 + x + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} l \left(\frac{1 + 2x - \sqrt{5}}{1 + 2x + \sqrt{5}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{6 - 5x + x^2} = l\left(\frac{x-3}{x-2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{18 + 9x + x^2} = \frac{1}{3}\, l\left(\frac{x+3}{x+6}\right),$$

$$\int \frac{dx}{-5 - 4x + x^2} = \frac{1}{6}\, l\left(\frac{x-5}{x+1}\right).$$

10. Das allgemeinere Integral

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}$$

lässt sich leicht auf Nr. 9 zurückführen, wenn man es schreibt:

$$\frac{1}{c}\int \frac{dx}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2};$$

man erhält

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}$$

$$= -\frac{2}{b + 2cx}, \quad \text{wenn} \quad 4ac - b^2 = 0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{b + 2cx}{\sqrt{4ac - b^2}}, \quad \text{wenn} \quad 4ac - b^2 > 0,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\, l\left(\frac{b + 2cx - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + 2cx + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \quad \text{wenn} \quad 4ac - b^2 < 0.$$

11. Setzt man zur Abkürzung $a + bx + cx^2 = T$, so ist

1) $$\int \frac{b + 2cx}{T}\, dx = \int \frac{dT}{T} = lT,$$

2) $$\int \frac{\alpha + \beta x}{T}\, dx = \frac{1}{2c}\int \frac{\beta(b + 2cx) + 2\alpha c - \beta b}{T}\, dx$$

$$= \frac{\beta}{2c}\, lT + \frac{2\alpha c - \beta b}{2c}\int \frac{dx}{T},$$

also

3) $$\int \frac{x}{T}\, dx = \frac{1}{2c}\, lT - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{T}.$$

Z. B.

$$\int \frac{3+10x}{4+3x+5x^2}\,dx = l(4+3x+5x^2),$$

$$\int \frac{3+2x}{13+9x+3x^2}\,dx = \tfrac{1}{3}\int \frac{9+6x}{13+9x+3x^2}\,dx$$
$$= l(\sqrt[3]{13+9x+3x^2});$$

$$\int \frac{1-x}{1+x+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{-(1+2x)+3}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,l(1+x+x^2) + \sqrt{3}\,\operatorname{arctan}\frac{1+2x}{\sqrt{3}};$$

$$\int \frac{3+5x}{2-7x+3x^2} = \tfrac{1}{6}\int \frac{5(-7+6x)+53}{2-7x+3x^2}\,dx$$
$$= \tfrac{13}{5}\,l(x-2) - \tfrac{14}{15}\,l(3x-1).$$

12. Durch die Identität:

$$x^m = \frac{1}{c}\,(x^{m-2}T - bx^{m-1} - ax^{m-2}),$$

erhält man die Reduktionsformel:

$$\int \frac{x^m}{T}\,dx = \frac{x^{m-1}}{(m-1)c} - \frac{b}{c}\int \frac{x^{m-1}}{T}\,dx$$
$$- \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-1}}{T}\,dx, \quad m>1.$$

Aus dieser folgt unter Rücksicht auf die in Nr. 11 entwickelte Formel 3):

$$\int \frac{x^2}{T}\,dx = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\,lT + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{x^3}{T}\,dx = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{b^2-ac}{2c^3}\,lT + \frac{b(3ac-b^2)}{2c^3}\int \frac{dx}{T}.$$

13. Es ist

$$1)\quad \int \frac{b+2cx}{T^n}\,dx = \int \frac{dT}{T^n} = -\frac{1}{(n-1)T^{n-1}}, \quad n>1.$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int \frac{dx}{T^n} = \frac{x}{T^n} + n\int \frac{bx+2cx^2}{T^{n+1}}\,dx.$$

Das Integral rechts kann man schreiben:

$$\int \frac{2T - 2a - bx}{T^{n+1}}\,dx = 2n\int \frac{dx}{T^n} - n\int \frac{2a + bx}{T^{n+1}}\,dx;$$

dadurch ergiebt sich:

$$(2n-1)\int \frac{dx}{T^n} = -\frac{x}{T^n} + 2an\int \frac{dx}{T^{n+1}} + nb\int \frac{x}{T^{n+1}}\,dx.$$

Nun findet man aus 1), wenn man das Integral links zerlegt:

$$\int \frac{x}{T^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)c\,T^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{T^n},$$

also auch

$$\int \frac{x}{T^{n+1}}\,dx = -\frac{1}{2nc\,T^n} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{T^{n+1}},$$

mithin

$$(2n-1)\int \frac{dx}{T^n} = -\frac{b + 2cx}{2c\,T^n} + \frac{n(4ac - b^2)}{2c}\int \frac{dx}{T^{n+1}}.$$

Hier ist das Integral rechts das verwickeltere; man erhält also die Reduktionsformel:

$$2)\qquad \int \frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b + 2cx}{n\lambda T^n} + \frac{2(2n-1)c}{n\lambda}\int \frac{dx}{T^n},$$

$$\lambda = 4ac - b^2.$$

Z. B. $\displaystyle\int \frac{dx}{T^2} = \frac{b + 2cx}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda}\int \frac{dx}{T},$

$$\int \frac{dx}{T^3} = \frac{b + 2cx}{\lambda}\left(\frac{1}{2T^2} + \frac{3c}{\lambda T}\right) + \frac{6c^2}{\lambda^2}\int \frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{dx}{T^4} = \frac{b + 2cx}{\lambda}\left(\frac{1}{3T^3} + \frac{5c}{3\lambda T^2} + \frac{10c^2}{\lambda^2 T}\right) + \frac{20c^3}{\lambda^3}\int \frac{dx}{T}.$$

Ferner erhält man:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{\alpha + \beta x}{T^n}\,dx &= \frac{1}{2c}\int \frac{\beta(b + 2cx) + 2\alpha c - \beta b}{T^n}\,dx \\ &= -\frac{\beta}{2(n-1)c\,T^{n-1}} + \frac{2\alpha c - \beta b}{2c}\int \frac{dx}{T^n}. \end{aligned}\right.$$

14. Um

$$\int \frac{x^m}{T^n}\,dx$$

zu bestimmen, setzt man

$$x^m = \frac{1}{c}\,x^{m-2}(T - bx - a);$$

dann erhält man durch Zerlegung:

$$\int \frac{x^m}{T^n}\,dx = \frac{1}{c}\int \frac{x^{m-2}}{T^{n-1}}\,dx - \frac{b}{c}\int \frac{x^{m-1}}{T^n}\,dx - \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}}{T^n}\,dx.$$

Auf das erste Integral rechts wendet man partielle Integration an und erhält:

$$\int \frac{x^{m-2}}{T^{n-1}}\,dx = \frac{1}{m-1}\int \frac{d(x^{m-1})}{T^{n-1}} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)T^{n-1}}$$
$$+ \frac{n-1}{m-1}\int \frac{x^{m-1}(b+2cx)}{T^n}\,dx$$
$$= \frac{x^{m-1}}{(m-1)T^{n-1}} + \frac{(n-1)b}{m-1}\int \frac{x^{m-1}}{T^n}\,dx$$
$$+ \frac{2(n-1)c}{m-1}\int \frac{x^m}{T^n}\,dx.$$

Setzt man dies ein und vereinigt die gleichen Integrale, so ergiebt sich die Reduktionsformel:

$$\int \frac{x^m}{T^n}\,dx = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)cT^{n-1}} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)c}\int \frac{x^{m-1}}{T^n}\,dx$$
$$+ \frac{(m-1)a}{(2n-m-1)c}\int \frac{x^{m-2}}{T^n}\,dx.$$

In dem speziellen Falle $m = 2n-1$ wird diese Formel unbrauchbar; man benutzt dann die identische Gleichung:

$$\frac{x^{2n-1}}{T^n} = \frac{x^{2n-3}(T - bx - a)}{cT^n},$$

und leitet hieraus folgende Reduktionsformel ab:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{T^n}\,dx = \frac{1}{c}\int \frac{x^{2n-3}}{T^{n-1}}\,dx$$
$$- \frac{b}{c}\int \frac{x^{2n-2}}{T^n}\,dx - \frac{a}{c}\int \frac{x^{2n-3}}{T^n}\,dx.$$

Nach diesen Bemerkungen erhält man mit Rücksicht auf Nr. 13:

$$\int \frac{x}{T^2}\,dx = -\frac{2a+bx}{\lambda T} - \frac{b}{\lambda}\int\frac{dx}{T}, \quad \lambda = 4ac - b^2,$$

$$\int \frac{x^2}{T^2}\,dx = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{c\lambda T} + \frac{2a}{\lambda}\int\frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{x^3}{T^2}\,dx = \frac{1}{2c^2}\,lT + \frac{a(2ac-b^2)+b(3ac-b^2)x}{c^2\lambda T}$$

$$-\frac{b(6ac-b^2)}{2c^2\lambda}\int\frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{x}{T^3}\,dx = -\frac{2a+bx}{2\lambda T^2} - \frac{3b(b+2cx)}{2\lambda^2 T} - \frac{3bc}{\lambda^2}\int\frac{dx}{T},$$

$$\int \frac{x^2}{T^3}\,dx = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{2c\lambda T^2} + \frac{(2ac+b^2)(b+2cx)}{2c\lambda^2 T}$$

$$+\frac{2ac+b^2}{\lambda^2}\int\frac{dx}{T}.$$

15. Es ist

1) $$\int\frac{dx}{xT} = \frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{b+cx}{T}\right)dx = \frac{1}{2a}\,l\left(\frac{x^2}{T}\right) - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{T}.$$

Ähnlich hat man:

2) $$\left\{\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^m T} &= \frac{1}{a}\int\frac{1}{x^{m-1}}\left(\frac{1}{x} - \frac{b+cx}{T}\right)dx\\ &= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{x^{m-1}T}\\ &\quad -\frac{c}{a}\int\frac{dx}{x^{m-2}T}, \quad m>1.\end{aligned}\right.$$

Z. B. $$\int\frac{dx}{x^2T} = \frac{b}{2a^2}\,l\left(\frac{T}{x^2}\right) - \frac{1}{ax} + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int\frac{dx}{T},$$

$$\int\frac{dx}{x^3T} = \frac{ac-b^2}{2a^3}\,l\left(\frac{T}{x^2}\right) + \frac{b}{a^2x} - \frac{1}{2ax^2}$$

$$+\frac{b(3ac-b^2)}{2a^3}\int\frac{dx}{T}.$$

16. Man hat:

$$1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{xT^n} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{T^{n-1}}\left(\frac{1}{x} - \frac{b+cx}{T}\right)dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xT^{n-1}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{T^n} - \frac{c}{a}\int \frac{x}{T^n}dx, \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{2(n-1)aT^{n-1}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{T^n} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xT^{n-1}}, \\ \qquad n > 1. \end{cases}$$

Z. B.
$$\int \frac{dx}{xT^2} = \frac{1}{2a^2} l\left(\frac{x^2}{T}\right) + \frac{2ac - b^2 - bcx}{a\lambda T}$$
$$- \frac{b(6ac - b^2)}{2a^2\lambda}\int \frac{dx}{T}, \quad \lambda = 4ac - b^2.$$

Ähnlich ist:

$$\int \frac{dx}{x^m T^n} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^{m-1}T^{n-1}}\left(\frac{1}{x} - \frac{b+cx}{T}\right)dx$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^m T^{n-1}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^{m-1}T^n} - \frac{c}{a}\int \frac{dx}{x^{m-2}T^n}.$$

Das erste Integral rechts giebt, durch partielle Integration behandelt:

$$\int \frac{dx}{x^m T^{n-1}} = -\frac{1}{m-1}\int \frac{d(x^{-m+1})}{T^{n-1}}$$
$$= -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}T^{n-1}} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{b+2cx}{x^{m-1}T^n}dx$$
$$= -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}T^{n-1}} - \frac{(n-1)b}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-1}T^n}$$
$$- \frac{2(n-1)c}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}T^n}.$$

Setzt man dies ein und vereinigt die gleichen Integrale, so erhält man die Reduktionsformel:

$$2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x^m T^n} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}T^{n-1}} \\ \displaystyle\quad - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-1}T^n} \\ \displaystyle\quad - \frac{(m+2n-3)c}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-2}T^n}, \quad m > 1, \; n > 1. \end{cases}$$

Z. B. $$\int \frac{dx}{x^2 T^2} = \frac{b}{a^3} l\left(\frac{T}{x^2}\right) - \frac{1}{a^2 x} + \frac{b(b^2 - 3ac) + c(b^2 - 2ac)x}{a^2 \lambda T}$$
$$- \frac{b^4 - 6ab^2c + 6a^2c^2}{a^3\lambda} \int \frac{dx}{T}.$$

§ 3.

Fortsetzung. Integration durch Zerlegung in Partialbrüche.

1. Wenn $\psi(x)$ und $F(x)$ ganze Funktionen bedeuten, deren erste von höherem Grade als die zweite ist, so lässt sich die in dem Quotienten $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ angedeutete Division soweit ausführen, dass die vorliegende unecht gebrochene Funktion in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und in eine echt gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ zerfällt, dass also eine Gleichung von der Form

$$\frac{\psi(x)}{F(x)} = \varphi(x) + \frac{f(x)}{F(x)}$$

zum Vorschein kommt. Sind ferner a, b, c u.s.w. die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, so hat man weiter

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ganze positive Zahlen bedeuten.

2. In dem einfachen Falle, wo alle Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1$ sind, gilt folgende Zerlegung:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots$$

Zur Bestimmung der Zähler der Partialbrüche hat man drei Methoden.

I. Man beseitigt in der letzten Gleichung die Nenner und setzt der Reihe nach $x = a$, b, $c \ldots$

II. Nachdem man die Nenner beseitigt hat, ordnet man die rechte Seite nach Potenzen von x und vergleicht links und rechts die Koeffizienten der gleichhohen Potenzen.

III. Man hat

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad C = \frac{f(c)}{F'(c)} \cdots$$

Z. B. $$\frac{7x^2 + 18x - 19}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

I. Durch Beseitigung der Nenner erhält man:

$$7x^2 + 18x - 19 = A(x+1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+1),$$

also ergiebt sich

für $x = 2$, $45 = 15A$, $A = 3$,
für $x = -1$, $-30 = -6B$, $B = 5$,
für $x = -3$, $-10 = 10C$, $C = -1$.

II. Es ist

$$7x^2 + 18x - 19 = (A + B + C)x^2 + (4A + B - C)x + (3A - 6B - 2C);$$

folglich muss

$$A + B + C = 7,$$
$$4A + B - C = 18,$$
$$3A - 6B - 2C = -19$$

sein, woraus wieder folgt:

$$A = 3, \quad B = 5, \quad C = -1.$$

III. Da

$$f(x) = 7x^2 + 18x - 19, \quad F'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

ist, so hat man

$$A = \frac{f(2)}{F'(2)} = \frac{45}{15} = 3, \quad B = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-30}{-6} = 5,$$

$$C = \frac{f(-3)}{F'(-3)} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Hiernach ist nun

1) $$\int \frac{7x^2 + 18x - 19}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}\, dx = l\left(\frac{(x-2)^3(x+1)^5}{x+3}\right).$$

Weitere Beispiele sind:

2) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 13}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\, dx = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+2}\right) dx \\ \displaystyle\qquad = l\left(\frac{\sqrt{(x-1)^3(x-3)}}{x+2}\right), \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 - 18x - 25}{x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24}\, dx \\ \displaystyle = \int\left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-2)} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2(x+4)}\right) dx \\ \displaystyle = l\left(\frac{(x-1)^2(x+3)}{\sqrt{(x-2)^3(x+4)}}\right), \end{cases}$$

4) $$\int \frac{dx}{2rx - x^2} = \frac{1}{2r}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2r}\right)dx = \frac{1}{2r}l\left(\frac{x}{2r-x}\right),$$

5) $$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = -\frac{1}{2a^2}\int\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} - \frac{2}{x}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{2a^2}l\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right).\end{cases}$$

Giebt es unter den Wurzeln $a, b, c \dots$ komplexe Werte, so vereinigt man je zwei Partialbrüche, in deren Nennern konjugiert komplexe Wurzeln vorkommen; man erhält dann statt jener zwei Partialbrüche einen einzigen reellen Partialbruch mit linearem Zähler und quadratischem Nenner. Sind z. B. zwei Wurzeln $g \pm hi$ vorhanden, so geben die entsprechenden Partialbrüche zusammengefasst einen einzigen von der Form

$$\frac{Mx + N}{(x-g)^2 + h^2}.$$

Beispiele.

6) $$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}dx = \tfrac{1}{7}\int\left(\frac{4}{x-2} + \frac{17x-1}{x^2+3}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \tfrac{4}{7}l(x-2) + \tfrac{17}{14}l(x^2+3) - \frac{1}{7\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{x}{\sqrt{3}},\end{cases}$$

7) $$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{5x^2 + 6x + 21}{x^3 + x^2 - 7x + 65}dx = \int\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3x-1}{x^2 - 4x + 13}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = 2l(x+5) + \tfrac{3}{2}l(x^2 - 4x + 13) + \tfrac{5}{3}\,arctan\,\frac{x-2}{3},\end{cases}$$

8) $$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{1-x+x^2}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \tfrac{1}{6}l\left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}},\end{cases}$$

9) $$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{k}{3a}\left[\tfrac{1}{2}l\left(\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2}\right) + \sqrt{3}\cdot arctan\,\frac{2x-k}{\sqrt{3}}\right], \\ \displaystyle\qquad k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}},\end{cases}$$

10) $$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\int\left(\frac{1+x}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \tfrac{1}{6}l\left(\frac{1-x+x^2}{(1+x)^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}},\end{cases}$$

11) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{x\,dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk}\left[\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{x^2-kx+x^2}{(k+x)^2}\right)\right. \\ \displaystyle\qquad\left. + \sqrt{3}\cdot arctan\,\frac{2x-k}{\sqrt{3}}\right], \quad k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \end{cases}$$

12) $$\int \frac{dx}{x(1+x^3)} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^3}\right)dx = \tfrac{1}{3}\,l\left(\frac{x^3}{1+x^3}\right),$$

13) $$\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)} = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{1+x^3}\right)dx = -\frac{1}{x} - \int\frac{x\,dx}{1+x^3},$$

14) $$\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)} = \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{1+x^3}\right)dx = -\frac{1}{2x^2} - \int\frac{dx}{1+x^3},$$

15) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x^4(1+x^3)} = \int\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x(1+x^3)}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = -\frac{1}{3x^3} + \tfrac{1}{3}\,l\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right), \end{cases}$$

16) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4} = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \tfrac{1}{4}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \tfrac{1}{2}\,arctan\,x, \end{cases}$$

17) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4} = \int\left(\frac{\sqrt{2}-x}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{\sqrt{2}+x}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[l\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right) + 2\,arctan\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right], \end{cases}$$

18) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{x^2dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x}{1-x\sqrt{2}+x^2} - \frac{x}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[l\left(\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right) + 2\,arctan\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right], \end{cases}$$

19) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1+x}{1+x+x^2} + \frac{1-x}{1-x+x^2}\right)dx \\ \displaystyle\qquad = \tfrac{1}{4}\,l\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}, \end{cases}$$

$$20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{x^2dx}{1+x^2+x^4}=\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{x}{1-x+x^2}-\frac{x}{1+x+x^2}\right)dx \\ \displaystyle\qquad=\tfrac{1}{4}l\left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}. \end{cases}$$

3. In dem allgemeinen Falle, wo nicht sämtliche Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleich der Einheit sind, gilt folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}&=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ &+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{R}{(x-r)^\varrho}+\frac{R_1}{(x-r)^{\varrho-1}}+\cdots+\frac{R_{\varrho-1}}{x-r}\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Die Zähler $A, B, \ldots R$ findet man nach Nr. 2, I; die übrigen nach II, wobei man nur soviele Gleichungen auswählen kann, als Unbekannte noch zu bestimmen sind. Oder um die Zähler irgend einer Reihe z. B. $R, R_1, R_2, \ldots$ zu bestimmen, setze man die ganze Funktion

$$\frac{F(x)}{(x-r)^\varrho}=\Phi(x)$$

und bilde folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}f(r)&=R\Phi(r),\\ f'(r)&=R\Phi'(r)+R_1\Phi(r),\\ f''(r)&=R\Phi''(r)+2R_1\Phi'(r)+2R_2\Phi(r),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

deren allgemeines Schema ist

$$\begin{aligned}f^{(m)}(r)&=R\Phi^{(m)}(r)+mR_1\Phi^{(m-1)}(r)+m(m-1)R_2\Phi^{(m-2)}(r)\\ &+m(m-1)(m-2)R_3\Phi^{(m-3)}(r)+\cdots\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen liefert die erste R, die zweite R_1 u. s. w.

$$\text{Z. B.}\int\frac{x^2dx}{x^3+4x^2+5x+2}=\int\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right]dx$$
$$=-\frac{1}{x+1}+l\left(\frac{(x+2)^4}{(x+1)^3}\right),$$

$$\int \frac{5x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x - 3}{x^2(x-1)^3(x+1)}$$

$$= \int \left[\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= \frac{-2x^2 + 5x - 6}{2x(x-1)^2} + l\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x)^3(1-x)^2} = \frac{-17x^4 - 7x^3 + 20x^2 + 4x - 4}{8x^2(1+x)^2(1-x)}$$

$$+ 3lx - \tfrac{39}{16} l(1+x) + \tfrac{9}{16} l(1-x).$$

Sind einige der Wurzeln $a, b, c \ldots$ komplexe Zahlen, so vereinigt man auch hier diejenigen Partialbrüche, deren Nenner konjugierte Wurzeln enthalten und von gleichem Grade sind.

Z. B. $$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2} dx = \tfrac{1}{3} \int \left[\frac{4x+8}{x^2+2} - \frac{x+4}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{3} l(x+1) + \tfrac{2}{3} l(x^2+2) + \frac{4\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctan} \frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = -\frac{4x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 7x + 4}{8(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$+ \tfrac{1}{4} l\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right) - \tfrac{1}{8} \operatorname{arctan} x,$$

$$\int \frac{x\,dx}{(1-x)^2(1+x+x^2)} = \tfrac{1}{3} \int \left[\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x+x^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3(1-x)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \frac{1+2x}{\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2(1+x+x^2)} = \tfrac{1}{3} \int \left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{1+x+x^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3(1-x)} + \tfrac{1}{6} l\left(\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}.$$

4. Zur Entwickelung der Integrale

$$\int \frac{dx}{(a+bx^3)^2}, \quad \int \frac{dx}{(a+bx^3)^3}, \ldots$$

lässt sich die Zerlegung in Partialbrüche gleichfalls benutzen; bequemer ist indessen die Anwendung der Reduktionsformel:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^3)^{n+1}} = \frac{x}{3na(a+bx^3)^n} + \frac{3n-1}{3na}\int \frac{dx}{(a+bx^3)^{n-1}},$$

die man sich nach dem Verfahren in § 2 Nr. 7 verschafft. Man erhält:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x}{3a(a+bx^3)} + \frac{2}{3a}\int \frac{dx}{a+bx^3},$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx^3)^3} = \frac{x(8a+5bx^3)}{18a^2(a+bx^3)^2} + \frac{5}{9a^2}\int \frac{dx}{a+bx^3},$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^3)^3} = \frac{1}{18}\left[\frac{x(8+5x^3)}{(1+x^3)^2} + \frac{5}{3}\, l\left(\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\right) + \frac{10}{\sqrt{3}}\, arctan\, \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right].$$

5. Wenn in

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^3)^n}$$

die ganze Zahl m von der Form $3k+2$ ist, so findet man das Integral durch die Substitution $a+bx^3 = y$.

Z. B.
$$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{1}{3b(a+bx^3)},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{(1+x^3)^3} = -\frac{1+2x^3}{6(1+x^3)^2},$$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^3)^2} = \frac{1}{3a^2}\left[\frac{a}{a+bx^3} + l\left(\frac{x^3}{a+bx^3}\right)\right].$$

Ist m von der Form $3k$ oder $3k+1$, so erhält man durch partielle Integration die Reduktionsformel

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^3)^{n+1}} = \frac{x^{m+1}}{3na(a+bx^2)^n} - \frac{m-3n+1}{3na}\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^3)^n}.$$

Z. B.
$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x^2}{3a(a+bx^3)} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{x}{3b(a+bx^3)} + \frac{1}{3b}\int \frac{dx}{a+bx^3},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{x^2}{3b(a+bx^3)} + \frac{2}{3b}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3}.$$

Die beiden letzten Integrale lassen sich auch durch Zerlegung finden:

$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{a+bx^3} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{(a+bx^3)^2},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{1}{b}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3} - \frac{a}{b}\int \frac{x\,dx}{(a+bx^3)^2}.$$

Ferner erhält man:

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^3)^3} = \frac{x^2(7a+4bx^3)}{18a^2(a+bx^3)^2} + \frac{2}{9a^2}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3},$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^2} = -\frac{3a+4bx^3}{3a^2x(a+bx^3)} - \frac{4b}{3a^2}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3}.$$

6. Um den Wert des Integrales

$$\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4}$$

zu finden, unterscheide man die Fälle, ob $b^2 - 4ac$ positiv, Null oder negativ ist.

I. Man hat

$$\frac{1}{a+bx^2+cx^4} = \frac{4c}{(b-h+2cx^2)(b+h+2cx^2)},\quad \sqrt{b^2-4ac}=h,$$

und durch Zerlegung in Partialbrüche

$$\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{2c}{h}\int \frac{dx}{b-h+2cx^2} - \frac{2c}{h}\int \frac{dx}{b+h+2cx^2},$$

wo die einzelnen Integrale leicht zu finden sind.

II. Wenn $b^2 - 4ac = 0$ ist, so ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{2c}{b}\left\{\frac{x}{b+2cx^2} + \int \frac{dx}{b+2cx^2}\right\}.$$

III. Im Falle $4ac > b^2$ müssen a und c gleiche Vorzeichen haben, die man immer als positiv voraussetzen kann, weil sich negative a und c dadurch positiv machen lassen, dass man Zähler und Nenner der zu integrierenden Funktion mit -1 multipliziert. Es ist nun, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{2\sqrt{ac}-b} = k$$

gesetzt wird

$$\frac{1}{a+bx^2+cx^4}=\frac{1}{(\sqrt{a}-kx+\sqrt{c}\cdot x^2)(\sqrt{a}+kx+\sqrt{c}\cdot x^2)}$$

$$=\frac{1}{2k\sqrt{a}}\left\{\frac{k-\sqrt{c}\cdot x}{\sqrt{a}-kx+\sqrt{c}\cdot x^2}+\frac{k+\sqrt{c}\cdot x}{\sqrt{a}+kx+\sqrt{c}\cdot x^2}\right\}$$

und hieraus ergiebt sich

$$\int\frac{dx}{a+bx^2+cx^4}=\frac{1}{4k\sqrt{a}}l\left(\frac{\sqrt{a}+kx+\sqrt{c}\cdot x^2}{\sqrt{a}-kx+\sqrt{c}\cdot x^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{a(2b+k^2)}}\left\{arctan\,\frac{2\sqrt{c}\cdot x-k}{\sqrt{2b+k^2}}+arctan\,\frac{2\sqrt{c}\cdot x+k}{\sqrt{2b+k^2}}\right\}.$$

7. Nach demselben Verfahren erhält man für den Fall, dass b^2-4ac positiv ist,

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2+cx^4}=\frac{h-b}{h}\int\frac{dx}{b-h+2cx^2}+\frac{h+b}{h}\int\frac{dx}{b+h+2cx^2};$$

ferner für $b^2-4ac=0$

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2+cx^4}=-\frac{x}{b+2cx^2}+\int\frac{dx}{b+2cx^2};$$

endlich für ein negatives b^2-4ac

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2+cx^4}=-\frac{1}{4k\sqrt{c}}l\left(\frac{\sqrt{a}+kx+\sqrt{c}\cdot x^2}{\sqrt{a}-kx+\sqrt{c}\cdot x^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{c(2b+k^2)}}\left\{arctan\,\frac{2\sqrt{c}\cdot x-k}{\sqrt{2b+k^2}}+arctan\,\frac{2\sqrt{c}\cdot x+k}{\sqrt{2b+k^2}}\right\}.$$

8. Die noch hierher gehörenden Integrale

$$\int\frac{x\,dx}{a+bx^2+cx^4}\quad\text{und}\quad\int\frac{x^3dx}{a+bx^2+cx^4}$$

können mittels der Substitution $x^2=\xi$ entwickelt werden.

Z. B. $$\int\frac{x\,dx}{1+x^2+x^4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{1+2x^2}{\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{x^3dx}{1+x^2+x^4}=\tfrac{1}{4}l(1+x^2+x^4)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,arctan\,\frac{1+2x^2}{\sqrt{3}}.$$

9. Setzt man zur Abkürzung

$$4ac - b^2 = \lambda, \quad a + bx^2 + cx^4 = U,$$

so findet man

$$\int \frac{dx}{U^2} = \frac{(2ac - b^2)x - bcx^3}{2a\lambda U} + \frac{6ac - b^2}{2a\lambda} \int \frac{dx}{U} - \frac{bc}{2a\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{U^2} = \frac{bx + 2cx^3}{2\lambda U} - \frac{b}{2\lambda} \int \frac{dx}{U} + \frac{c}{\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U}$$

und allgemeiner

$$\int \frac{dx}{U^{n+1}} = \frac{(2ac - b^2)x - bcx^3}{2na\lambda U^n} + \frac{(8n-2)ac - (2n-1)b^2}{2na\lambda} \int \frac{dx}{U^n}$$

$$- \frac{(4n - 3)bc}{2na\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U^n},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{U^{n+1}} = \frac{bx + 2cx^3}{2n\lambda U^n} - \frac{b}{2n\lambda} \int \frac{dx}{U^n} + \frac{(4n - 3)c}{n\lambda} \int \frac{x^2 dx}{U^n},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 U} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{U} - \frac{c}{a} \int \frac{x^2 dx}{U},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 U} = \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{3ax^3} + \frac{b^2 - ac}{a^2} \int \frac{dx}{U} + \frac{bc}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{U}.$$

10. Bestimmt man die Koeffizienten P, Q, R aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2acP \qquad &+ \quad b\alpha Q + \alpha R = 2Ac, \\ 2bcP + (b\beta &+ 2c\alpha) Q + \beta R = 2Bc, \\ cP \qquad &+ \quad \beta Q \qquad = C, \end{aligned}$$

so erhält man folgende Integralformel:

$$\int \frac{A + Bx + Cx^2}{(\alpha + \beta x)(a + bx + cx^2)} dx$$

$$= \frac{P}{\beta} l(\alpha + \beta x) + \frac{Q}{2c} l(a + bx + cx^2) + \frac{R}{2c} \int \frac{dx}{a + bx + cx^2}.$$

Spezielle einfachere Formeln entstehen hieraus für $A = 1$, $B = C = 0$, für $B = 1$, $C = A = 0$, und für $C = 1$, $A = B = 0$.

§ 4.

Integration irrationaler Funktionen.

1. Aus der in § 2, Nr. 1 bewiesenen allgemeinen Formel

$$\int (a+bx)^\mu dx = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}, \quad \mu \gtrless -1$$

folgen als besondere Fälle:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b},$$

$$\int \sqrt{a+bx}\cdot dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3b},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = -\frac{2}{b\sqrt{a+bx}}.$$

2. Unter der Voraussetzung ganzer positiver m, kann man in

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx}}$$

die Wurzel beseitigen, wenn man

$$\sqrt{a+bx} = y, \quad dx = \frac{2}{b} y\,dy$$

setzt; dadurch ergiebt sich

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^{m+1}} \int (y^2-a)^m dy.$$

Nun entwickelt man $(y^2-a)^m$ nach dem binomischen Satze und integriert durch Zerlegung. So erhält man:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}.$$

Wendet man auf dasselbe Integral partielle Integration an, so erhält man

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{b}\int x^m d\left(\sqrt{a+bx}\right)$$

$$= \frac{2}{b} x^m \sqrt{a+bx} - \frac{2m}{b}\int x^{m-1}\sqrt{a+bx}\cdot dx.$$

Für das Integral rechts kann man schreiben

$$\int \frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}} x^{m-1} dx = a \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}} dx + b \int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx}} dx.$$

Hier ist das zweite Integral rechts mit dem gegebenen identisch, so dass sich die Reduktionsformel ergiebt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x^m\sqrt{a+bx}}{(2m+1)b} - \frac{2ma}{(2m+1)b} \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx}}.$$

Z. B.
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}} = \tfrac{2}{7}x^3\sqrt{1+x} - \tfrac{6}{7}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}}$$
$$= \tfrac{2}{35}(-16 + 8x - 6x^2 + 5x^3)\sqrt{1+x}.$$

3. Durch dieselbe Substitution $\sqrt{a+bx} = y$ erhält man

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} l \left(\frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right), \text{ für } a > 0,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{a+bx}{-a}}, \text{ für } a < 0.$$

Aus der Reduktionsformel in Nr. 2 wird für $m = -n+1$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{(n-1)ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{(2n-2)a} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}}.$$

Z. B.
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}} = -\frac{2a-3bx}{4a^2x^2}\sqrt{a+bx} + \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$$

4. Dieselben Methoden führen zu folgenden Formeln:

$$\int x\sqrt{a+bx}\cdot dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2},$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\cdot dx = \frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3},$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^3}\,dx = -\frac{(2a+bx)\sqrt{a+bx}}{4ax^2} - \frac{b^2}{8a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$$

5. Mittels ähnlicher Methoden gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = 2\,\frac{2a+bx}{b^2\sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = -2\,\frac{8a^2+4abx-b^2x^2}{3b^3\sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^3}} = \frac{2}{a\sqrt{a+bx}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx)^3}} = -\frac{a+3bx}{a^2x\sqrt{a+bx}} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$$

6. Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}}$$

lässt sich je nach den Vorzeichen von a und c und unter der Voraussetzung, dass die Wurzel nicht für jeden reellen Wert von x imaginär wird, auf eine der Formen

$$\text{I.}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}},\quad \text{II.}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}},\quad \text{III.}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

bringen. Nun hat man

$$\text{I.}\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{\alpha}.$$

II. Um das zweite Integral zu finden, setzt man

$$x+\sqrt{\alpha^2+x^2} = y,\quad x = \frac{y^2-\alpha^2}{2y},\quad \sqrt{\alpha^2+x^2} = \frac{y^2+\alpha^2}{2y},\quad dx = \frac{y^2+\alpha^2}{2y^2}\,dy,$$

wodurch man erhält

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = \int \frac{dy}{y} = ly = l(x+\sqrt{\alpha^2+x^2}).$$

III. Durch Vertauschung von α^2 mit $-\alpha^2$ erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = l\left(x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\right).$$

7. Ist in

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+cx^2}}$$

I. m eine ungerade Zahl $= 2k+1$, so setzt man

$$\sqrt{a+cx^2} = y, \quad x^2 = \frac{y^2-a}{c}, \quad x\,dx = \frac{y}{c}\,dy,$$

und erhält

$$\int \frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{c^{k+1}} \int (y^2-a)^k\,dy.$$

Z.B. $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \int (y^2-\alpha^2)\,dy = -\tfrac{1}{3}(2\alpha^2+x^2)\sqrt{\alpha^2-x^2},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (y^2-1)^2\,dy = \left[\tfrac{1}{5}(1+x^2)^2 - \tfrac{2}{3}(1+x^2)+1\right]\sqrt{1+x^2}.$$

II. Ist m eine gerade Zahl, so giebt die Reduktionsformel in § 2, Nr. 8, indem man $n = \frac{1}{2}$ setzt:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{mc} x^{m-1}\sqrt{a+cx^2} - \frac{(m-1)a}{mc} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a+cx^2}}.$$

Z. B. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2-x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \arcsin\frac{x}{\alpha},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \tfrac{1}{8}x(2x^2+3)\sqrt{x^2-1} + \tfrac{3}{8} l\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

8. Ist in

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+cx^2}}$$

m eine gerade Zahl $= 2k$, so kann man setzen

$$\sqrt{a+cx^2} = yx, \quad x^2 = \frac{a}{y^2-c}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{y\,dy}{y^2-c};$$

dann ergiebt sich:

$$\int \frac{dx}{x^{2k}\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{1}{a^k} \int (y^2-c)^{k-1}\,dy.$$

Z. B. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha^2+x^2}} = -\frac{1}{\alpha^2}\int dy = -\frac{y}{\alpha^2} = -\frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{\alpha^2 x}.$$

Ist m ungerade, so kann man durch die Substitution:

$$x = \frac{1}{y}, \quad dx = -\frac{1}{y^2}\,dy, \quad \sqrt{a+cx^2} = \frac{\sqrt{c+ay^2}}{y},$$

das Integral auf die Form von Nr. 7 bringen. Es ist nämlich

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+cx^2}} = -\int \frac{y^{m-1}dy}{\sqrt{c+ay^2}}.$$

Z. B. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha^2-x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2y^2-1}} = -\frac{1}{\alpha}\,l\left(\alpha y+\sqrt{\alpha^2y^2-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\,l\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arccos\,\frac{1}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{y^2dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\tfrac{1}{2}y\sqrt{1+y^2}+\tfrac{1}{2}\,l\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right).$$

Man kann das gegebene Integral auch reduzieren, indem man in der Reduktionsformel in Nr. 7, $-m+2$ an Stelle von m setzt; dadurch ergiebt sich zunächst

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+cx^2}}{(m-2)cx^{m-1}} - \frac{(m-1)a}{(m-2)c}\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+cx^2}},$$

und hieraus

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+cx^2}}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{(m-2)c}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+cx^2}},$$

$$m > 1.$$

Z.B. $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x^3} + \tfrac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{\alpha^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2\alpha^2x^2} + \frac{1}{2\alpha^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2\alpha^2x^2} - \frac{1}{2\alpha^3}\,l\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\right).$$

9. Man kann schreiben

$$\int \sqrt{a + cx^2}\,.\,dx = \int \frac{a + cx^2}{\sqrt{a + cx^2}}\,dx$$

$$= a\int \frac{dx}{\sqrt{a + cx^2}} + c\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + cx^2}};$$

wenn man das zweite Integral rechts nach Nr. 7 reduziert, so erhält man

$$1)\qquad \int \sqrt{a + cx^2}\,.\,dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{a + cx^2} + \tfrac{1}{2} a\int \frac{dx}{\sqrt{a + cx^2}}.$$

Z. B.
$$\int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,.\,dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \arcsin\frac{x}{\alpha},$$

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,.\,dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{1 + x^2} + \tfrac{1}{2} l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$

$$\int \sqrt{x^2 - \alpha^2}\,.\,dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2 - \alpha^2} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 l\left(x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right).$$

Ebenso kann man umformen:

$$\int x^m\sqrt{a + cx^2}\,.\,dx = \int \frac{x^m(a + cx^2)}{\sqrt{a + cx^2}}\,dx$$

$$= a\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + cx^2}} + c\int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{a + cx^2}},$$

und das zweite Integral rechts nach Nr. 7 reduzieren, indem man $m + 2$ statt m setzt. Dies ergiebt:

$$2)\quad \int x^m\sqrt{a + cx^2}\,.\,dx = \frac{1}{m + 2} x^{m+1}\sqrt{a + cx^2} + \frac{a}{m + 2}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + cx^2}}.$$

Z. B.
$$\int x^2\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,.\,dx = \tfrac{1}{4} x^3\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{4}\alpha^2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{8} x(2x^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{8}\alpha^4 \arcsin\frac{x}{\alpha},$$

$$\int \sqrt{(\alpha^2 - x^2)^3}\,.\,dx = \alpha^2\int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,.\,dx - \int x^2\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,.\,dx$$

$$= \tfrac{1}{8} x(5\alpha^2 - 2x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{3}{8}\alpha^4 \arcsin\frac{x}{\alpha}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$\int \frac{\sqrt{a + cx^2}}{x^m}\,dx = a\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a + cx^2}} + c\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a + cx^2}};$$

wendet man nun auf das erste Integral rechts die Reduktionsformel in Nr. 8 an, so erhält man:

$$3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sqrt{a+cx^2}}{x^m}\,dx = -\frac{\sqrt{a+cx^2}}{(m-1)x^{m-1}} \\ \displaystyle\qquad + \frac{c}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+cx^2}}, \quad m > 1. \end{cases}$$

Z. B. $$\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{\alpha}.$$

Für $m = 1$ versagt die Formel 3); man hat dann:

$$4)\quad \int \frac{\sqrt{a+cx^2}}{x}\,dx = a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+cx^2}} + \int \frac{cx\,dx}{\sqrt{a+cx^2}}.$$

Das erste Integral rechts findet man nach Nr. 8, das zweite hat den Wert $\sqrt{a+cx^2}$.

Z. B. $$\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{\alpha^2-x^2} - \alpha\, l\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\right),$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-\alpha^2} + \alpha \arcsin\frac{\alpha}{x}.$$

10. Wenn man in der Reduktionsformel in § 2, Nr. 7, $\frac{1}{2}n$ statt n setzt, so erhält man:

$$1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a+cx^2)^n}} = \frac{x}{(n-2)a\sqrt{(a+cx^2)^{n-2}}} \\ \displaystyle\qquad + \frac{n-3}{(n-2)a}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+cx^2)^{n-2}}}. \end{cases}$$

Z. B. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+cx^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{a+cx^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+cx^2)^5}} = \frac{x(3a+2cx^2)}{3a^2\sqrt{(a+cx^2)^3}}.$$

Setzt man in der Reduktionsformel in § 2, Nr. 8, $\frac{1}{2}n$ statt n, so ergiebt sich:

$$2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+cx^2)^n}} = -\frac{x^{m-1}}{(n-m-1)c\sqrt{(a+cx^2)^{n-2}}} \\ \displaystyle\qquad + \frac{(m-1)a}{(n-m-1)c}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{(a+cx^2)^n}}. \end{cases}$$

Z. B. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^5}} = \frac{x}{2\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^3}} - \frac{1}{2}\alpha^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^5}}$

$$= \frac{1}{3\alpha^2}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\right)^3,$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^3}} = -\frac{x^3}{2\sqrt{\alpha^2 - x^2}} + \frac{3}{2}\alpha^2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

$$= \frac{x(3\alpha^2 - x^2)}{2\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \frac{3}{2}\alpha^2 \arcsin \frac{x}{\alpha}.$$

Die Formel 2) versagt für $m = n - 1$; in diesem Falle hat man:

$$3)\left\{\begin{aligned} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{(a + cx^2)^n}} &= \frac{1}{c}\int \frac{x^{n-3}(a + cx^2 - a)}{\sqrt{(a + cx^2)^n}} \\ &= \frac{1}{c}\int \frac{x^{n-3} dx}{\sqrt{(a + cx^2)^{n-2}}} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{n-3} dx}{\sqrt{(a + cx^2)^n}}, \\ &\qquad n \geqq 3. \end{aligned}\right.$$

Z. B. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^3}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} + \alpha^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^3}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{\alpha},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^5}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^5}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)^3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + l(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Das Integral

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a + cx^2)^n}}$$

kann man durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ auf 2) zurückführen; man erhält dann:

$$4) \qquad \int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a + cx^2)^n}} = -\int \frac{y^{m+n-2}}{\sqrt{(c + ay^2)^n}} dy.$$

Z.B. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1 - x^2)^3}} = -\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2 - 1)^3}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} - l(y + \sqrt{y^2 - 1})$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - l\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right),$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-1)^3}} = -\frac{y^3}{2\sqrt{y^2-1}} + \frac{3y}{2\sqrt{y^2-1}}$$

$$-\tfrac{3}{2} l(y+\sqrt{y^2-1}) = \frac{-1+3x^2}{2x^2\sqrt{1-x^2}} - \tfrac{3}{2} l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

Die Integrale

$$5) \quad \int x^m \sqrt{(a+cx^2)^n}.\, dx, \quad \int \frac{\sqrt{(a+cx^2)^n}}{x^m} dx, \quad n \geqq 3,$$

lassen sich auf die vorigen zurückführen, wenn man

$$\sqrt{(a+cx^2)^n} = \frac{\sqrt{(a+cx^2)^{n+1}}}{\sqrt{a+cx^2}}$$

setzt; denn $\sqrt{(a+cx^2)^{n+1}}$ ist rational.

Z. B. $$\int x^2\sqrt{(1-x^2)^3}.\, dx = \int \frac{x^2(1-x^2)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} - 2\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{48} x(3-14x^2+8x^4)\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{16} \arcsin x,$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 dx = \int \frac{(1-x^2)^2}{x^3\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} - 2\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1+2x^2}{2x^2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{2} l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

11. Um

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zu bestimmen, hat man zu unterscheiden, ob $c \gtrless 0$ ist.

I. $c > 0$. In diesem Falle kann man schreiben

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c}.\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4c^2} + \left(\frac{b}{2c}+x\right)^2},$$

wodurch das Integral auf Nr. 6, Fall II oder III zurückgeführt ist. Man erhält

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l\left[\frac{b}{2c} + x + \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4c^2} + \left(\frac{b}{2c}+x\right)^2}\right],$$

oder da man

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}\, l(2c)$$

in die willkürliche Konstante mit einrechnen kann:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\, l[b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}],\quad c>0.$$

Z. B. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=l(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2rx+x^2}}=l(r+x+\sqrt{2rx+x^2}).$$

II. $c<0$. Hier ist

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{-c}\,.\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4c^2}-\left(\frac{b}{-2c}-x\right)^2}.$$

Wenn die Wurzel nicht für jeden reellen Wert von x imaginär werden soll, so muss $b^2-4ac>0$ sein und das Integral ist auf Nr. 6, Fall I zurückgeführt. Es ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\, \arcsin\frac{-(b+2cx)}{\sqrt{b^2-4ac}},\quad c<0.$$

Z. B. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-(r-x)^2}}=\arcsin\frac{x-r}{r},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}}=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}.$$

12. Bezeichnet man das Trinom $a+bx+cx^2$ zur Abkürzung mit T und benutzt die in § 2, Nr. 14 erwähnte Reduktionsformel für $n=\frac{1}{2}$; $m=1, 2, 3$, so erhält man folgende Integrale:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{T}}=\frac{\sqrt{T}}{c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{T}}=-\frac{3b-2cx}{4c^2}\sqrt{T}+\frac{3b^2-4ac}{8c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{T}}=\frac{15b^2-16ac-10bcx+8c^2x^2}{24c^3}\sqrt{T}$$

$$-\frac{b(5b^2-12ac)}{16c^3}\int\frac{dx}{\sqrt{T}}.$$

13. Wendet man diese Formeln an, um in der identischen Gleichung

$$\int \sqrt{T} \,.\, dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{T}} + b \int \frac{x\,dx}{\sqrt{T}} + c \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{T}}$$

die rechts stehenden Integrale zu reduzieren, so findet man

$$\int \sqrt{T} \,.\, dx = \frac{b + 2cx}{4c} \sqrt{T} + \frac{4ac - b^2}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{T}},$$

und nachher giebt die Reduktionsformel in § 2 Nr. 14 für $n = -\frac{1}{2}$, $m = 1, 2$:

$$\int x \sqrt{T} \,.\, dx = \frac{8ac - 3b^2 + 2bcx + 8c^2x^2}{24c^2} \sqrt{T} - \frac{b(4ac - b^2)}{16c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$\int x^2 \sqrt{T} \,.\, dx = \frac{b(15b^2 - 52ac) + 2(12ac - 5b^2)cx + 8bc^2x^2 + 48c^3x^3}{192c^3} \sqrt{T}$$

$$- \frac{(4ac - b^2)(4ac - 5b^2)}{128c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{T}}.$$

14. Mit Hilfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{c + by + ay^2}},$$

mithin

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\, l \left\{ \frac{2a + bx + 2\sqrt{a(a + bx + cx^2)}}{x} \right\},$$

für $a > 0$,

$$= -\frac{2\sqrt{a + bx + cx^2}}{bx} \qquad \text{für } a = 0,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2a + bx}{x\sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad \text{für } a < 0.$$

15. Die in § 2 unter Nr. 16 entwickelte Reduktionsformel 2) liefert für $n = \frac{1}{2}$, $m = 2, 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{T}} = -\frac{\sqrt{T}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{T}} = \frac{2a - 3bx}{4a^2x^2} \sqrt{T} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{T}}.$$

16. Durch Benutzung der identischen Gleichung

$$\sqrt{T} = \frac{a + bx + cx^2}{\sqrt{T}}$$

gelangt man zu den Formeln

$$\int \frac{\sqrt{T}}{x} dx = \sqrt{T} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{T}} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{\sqrt{T}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{T}}{x} + c\int \frac{dx}{\sqrt{T}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{\sqrt{T}}{x^3} dx = -\frac{2a + bx}{4ax^2}\sqrt{T} + \frac{4ac - b^2}{8a}\int \frac{dx}{x\sqrt{T}}.$$

17. Die Reduktionsformel 2) in Nr. 13 des § 2 giebt, wenn zur Abkürzung $4ac - b^2 = \lambda$ gesetzt wird,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{T^3}} = \frac{2(b + 2cx)}{\lambda\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{T^3}} = -\frac{2(2a + bx)}{\lambda\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{T^3}} = \frac{2ab + (2b^2 - 4ac)x}{c\lambda\sqrt{T}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{T}}.$$

18. Nach den vorhin genannten Formeln erhält man:

$$\int \sqrt{T^3} \cdot dx = \frac{(b + 2cx)(3\lambda + 8cT)}{64c^2}\sqrt{T} + \frac{3\lambda^2}{128c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$\int x\sqrt{T^3} \cdot dx = \frac{\sqrt{T^5}}{5c} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{T^3} \cdot dx,$$

$$\int x^2\sqrt{T^3} \cdot dx = -\frac{(7b + 10cx)\sqrt{T^5}}{60c^2} + \frac{7b^2 - 4ac}{24c^2}\int \sqrt{T^3} \cdot dx.$$

19. Mittels der Substitution $x = \frac{1}{y}$ gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{T^3}} = \frac{4ac - 2b^2 - 2bcx}{a\lambda\sqrt{T}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{T^3}} = -\frac{\lambda + 4cx(b + 2cx)}{a\lambda x\sqrt{T}} - \frac{3b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{T^3}}.$$

20. Auf ähnliche Weise wie in Nr. 16 erhält man:

$$\int \frac{\sqrt{T^3}}{x}\,dx = \frac{32ac + 3b^2 + 14bcx + 8c^2x^2}{24c}\sqrt{T} + \frac{(12ac - b^2)b}{16c}\int \frac{dx}{\sqrt{T}} + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{T}}.$$

21. Mittels der Reduktionsformeln in Nr. 13 und 14 des § 2 ergeben sich die Formeln:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{T^5}} = \frac{2(b + 2cx)}{3\lambda\sqrt{T}}\left(\frac{8c}{\lambda} + \frac{1}{T}\right),$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{T^5}} = -\frac{2}{3\lambda\sqrt{T}}\left\{\frac{4b(b + 2cx)}{\lambda} + \frac{2a + bx}{T}\right\},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{T^5}} = \frac{2}{3c\lambda\sqrt{T}}\left\{\frac{(4ac + b^2)(b + 2cx)}{\lambda} + \frac{ab + (b^2 - 2ac)x}{T}\right\}.$$

Aus diesen Integralen, welche den in Nr. 17 entwickelten analog sind, können wie in Nr. 18, 19 und 20 wieder drei neue Formelgruppen abgeleitet werden.

§ 5.

Fortsetzung. Integration durch Rationalisierung.

1. Wenn in einem Integrale nur eine Wurzel von der Form $\sqrt[m]{a + bx}$ vorkommt, so kann sie durch die Substitution

$$\sqrt[m]{a + bx} = y, \quad x = \frac{y^m - a}{b}, \quad dx = \frac{m}{b}y^{m-1}dy$$

weggeschafft und damit das Integral rational gemacht werden. Für den Fall $m = 2$ giebt § 4 Nr. 1 bis Nr. 5 Beispiele hierzu; für $m = 3$ und $m = 4$ dienen die folgenden Aufgaben:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a + bx}} = -\frac{3(3a - 2bx)}{10b^2}\sqrt[3]{(a + bx)^2},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{a + bx}} = \frac{3(9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)}{40b^3}\sqrt[3]{(a + bx)^2},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{a + bx}} = -\frac{4(4a - 3bx)}{21b^2}\sqrt[4]{(a + bx)^3},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{a + bx}} = \frac{4(32a^2 - 24abx + 21b^2x^2)}{231b^3}\sqrt[4]{(a + bx)^3}.$$

2. Enthält ein Integral nur eine Wurzel von der Form

$$\sqrt{a + cx^2},$$

so kann man durch geeignete Substitutionen, je nachdem die Wurzel auf eine der drei Formen

$$\text{I. } \sqrt{\alpha^2 - x^2}, \quad \text{II. } \sqrt{\alpha^2 + x^2}, \quad \text{III. } \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

zu bringen ist, das Integral rational machen. Man setzt:

Im Falle I:

$$\frac{\alpha - x}{\alpha + x} = y^2, \quad x = \alpha \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \quad \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \frac{2\alpha y}{1 + y^2},$$

$$dx = -\frac{4\alpha y}{(1 + y^2)^2} dy,$$

im Falle II:

$$\sqrt{\alpha^2 + x^2} + x = y, \quad x = \frac{y^2 - \alpha^2}{2y}, \quad \sqrt{\alpha^2 + x^2} = \frac{y^2 + \alpha^2}{2y},$$

$$dx = \frac{y^2 + \alpha^2}{2y^2} dy,$$

im Falle III:

$$\sqrt{x^2 - \alpha^2} + x = y, \quad x = \frac{y^2 + \alpha^2}{2y}, \quad \sqrt{x^2 - \alpha^2} = \frac{y^2 - \alpha^2}{2y},$$

$$dx = \frac{y^2 - \alpha^2}{2y^2} dy.$$

Hiernach lassen sich folgende Integrale entwickeln:

1) $$\int \frac{dx}{(g + hx)\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{g^2 - h^2}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{(g - h)(1 - x)}{(g + h)(1 + x)}},$$
für $g^2 > h^2$,

2) $$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$$

3) $$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{(g + hx)\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{h^2 - g^2}} l\left(\frac{\sqrt{(h+g)(1+x)} + \sqrt{(h-g)(1-x)}}{\sqrt{(h+g)(1+x)} - \sqrt{(h-g)(1-x)}}\right), \quad \text{für } g^2 < h^2. \end{aligned}\right.$$

4) $$\int \frac{dx}{(g + hx)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} l\left(\frac{g + hx - h\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{g^2 + h^2}}{g + hx - h\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{g^2 + h^2}}\right),$$

5) $$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{g^2-h^2}}\, l\left(\frac{g+hx-h\sqrt{x^2-1}+\sqrt{g^2-h^2}}{g+hx-h\sqrt{x^2-1}-\sqrt{g^2-h^2}}\right),$$
für $g^2 > h^2$,

6) $$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

7) $$\int \frac{dx}{(g+hx)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{2}{\sqrt{h^2-g^2}}\, arctan\, \frac{g+hx-h\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{h^2-g^2}},$$
für $g^2 < h^2$.

3. In den drei Fällen von Nr. 2 leistet oft die Einführung trigonometrischer Funktionen gute Dienste. Man kann dadurch ein einfacheres Integral nicht selten direkt auf eine der Grundformeln 6 bis 9 in § 1 Nr. 1 zurückführen. Bei verwickelteren Integralen verfährt man nach § 7. Man setzt:

im Falle I:

$$x = \alpha\, sin\, u, \quad \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha\, cos\, u, \quad dx = \alpha\, cos\, u\, du,$$

im Falle II:

$$x = \alpha\, tan\, u, \quad \sqrt{\alpha^2 + x^2} = \alpha\, sec\, u, \quad dx = \alpha\, sec^2 u\, du.$$

im Falle III:

$$x = \alpha\, sec\, u, \quad \sqrt{x^2 - \alpha^2} = \alpha\, tan\, u, \quad dx = \alpha\, sin\, u\, sec^2 u\, du.$$

Beispiele.

1) $$\begin{cases} \int \sqrt{\alpha^2 - x^2} \cdot dx = \alpha^2 \int cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\alpha^2 \int (1 + cos\, 2u)\, du \\ \quad = \frac{1}{2}\alpha^2 u + \frac{1}{4}\alpha^2 sin\, 2u = \frac{1}{2}\alpha^2 arcsin\, \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{2} x\sqrt{\alpha^2 - x^2}, \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \int x^2 \sqrt{\alpha^2 - x^2} \cdot dx = \alpha^4 \int sin^2 u\, cos^2 u\, du = \frac{1}{8}\alpha^4 \int (1 - cos\, 4u)\, du \\ = \frac{1}{8}\alpha^4 u - \frac{1}{32}\alpha^4 sin\, 4u = \frac{1}{8}x(2x^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{1}{8}\alpha^4 arcsin\, \frac{x}{\alpha}; \end{cases}$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + x^2)^3}} = \frac{1}{\alpha^2}\int cos\, u\, du = \frac{1}{\alpha^2}\, sin\, u = \frac{x}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 + x^2}},$$

4) $$\begin{cases} \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{cos\, u\, du}{cos^2 u - sin^2 u} = \int \frac{d\,(sin\, u)}{1 - 2\, sin^2 u} \\ \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1 + \sqrt{2} \cdot sin\, u}{1 - \sqrt{2} \cdot sin\, u}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{2}}\right); \end{cases}$$

5) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\int du = \frac{u}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\, arccos\, \frac{\alpha}{x},$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha^2}\int \cos u\,du = \frac{1}{\alpha^2}\sin u = \frac{\sqrt{x^2-\alpha^2}}{\alpha^2 x},$$

7) $$\left\{\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x}\,dx &= \alpha\int \tan^2 u\,du = \alpha\int(\sec^2 u - 1)du\\ &= \alpha(\tan u - u) = \sqrt{x^2-\alpha^2} - \alpha \arccos\frac{\alpha}{x}.\end{aligned}\right.$$

Auch in anderen Fällen irrationaler Integrale hilft die Substitution trigonometrischer Funktionen. So kann man in

$$\int\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}\,dx,$$

$$x = \alpha\cos u,\quad dx = -\alpha\sin u\,du$$

setzen und erhält

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}\,dx &= -2\alpha\int \sin^2\tfrac{1}{2}u\,du = -\alpha\int(1-\cos u)du\\ &= -\alpha u + \alpha\sin u = \sqrt{\alpha^2-x^2} + \alpha\arcsin\frac{x}{\alpha}.\end{aligned}$$

Setzt man:

$$x = \alpha\sin^2\tfrac{1}{2}u,\quad dx = \alpha\sin\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u\,du,$$

so wird

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{\alpha-x}{x}}\,dx &= \alpha\int\cos^2\tfrac{1}{2}u\,du = \tfrac{1}{2}\alpha\int(1+\cos u)\,du\\ &= \tfrac{1}{2}\alpha u + \tfrac{1}{2}\alpha\sin u = \sqrt{x(\alpha-x)} + \alpha\arcsin\sqrt{\frac{x}{\alpha}}.\end{aligned}$$

4. Bezeichnet $\varphi(x^2)$ eine rationale Funktion von x^2, so lässt sich das Integral

$$\int\frac{\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt{a+cx^2}}$$

dadurch von der Wurzel befreien, dass man setzt

$$\frac{kx}{\sqrt{a+cx^2}} = u \qquad \text{mithin} \qquad x = u\sqrt{\frac{a}{k^2-cu^2}},$$

$$\sqrt{a+cx^2} = k\sqrt{\frac{a}{k^2-cu^2}},\quad dx = k^2\sqrt{\frac{a}{(k^2-cu^2)^3}}\cdot du,$$

worin k eine beliebige Konstante bezeichnet; es wird nämlich:

$$\int\frac{\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \int\varphi\left(\frac{au^2}{k^2-cu^2}\right)\frac{k\,du}{k^2-cu^2}.$$

Hiernach ist z. B. für $k = 1$

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2)\sqrt{a + cx^2}} = \int \frac{du}{\alpha + (a\gamma - \alpha c)u^2}$$

und daraus folgt

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2)\sqrt{a + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha(\alpha c - a\gamma)}}\, l \left\{\frac{\alpha\sqrt{a + cx^2} + \sqrt{\alpha(\alpha c - a\gamma)}\cdot x}{\alpha\sqrt{a + cx^2} - \sqrt{\alpha(\alpha c - a\gamma)}\cdot x}\right\}$$

$$\alpha(a\gamma - \alpha c) < 0,$$

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2)\sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{x}{\sqrt{a + cx^2}}, \quad a\gamma - \alpha c = 0,$$

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \gamma x^2)\sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(a\gamma - \alpha c)}}\, arctan\, \frac{\sqrt{\alpha(a\gamma - \alpha c)}\cdot x}{\alpha\sqrt{a + cx^2}},$$

$$\alpha(a\gamma - \alpha c) > 0.$$

Mittels der identischen Gleichung

$$\frac{\sqrt{a + cx^2}}{\alpha + \gamma x^2} = \frac{1}{\gamma}\left\{c + \frac{a\gamma - \alpha c}{\alpha + \gamma x^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{a + cx^2}}$$

kann das Integral

$$\int \frac{\sqrt{a + cx^2}}{\alpha + \gamma x^2}\, dx$$

auf das vorhergehende zurückgeführt werden.

5. Nach der in Nr. 4 auseinandergesetzten Methode lässt sich das Integral

$$\int \frac{dx}{(g + hx)\sqrt{a + cx^2}}$$

zwar nicht direkt entwickeln, wohl aber dadurch, dass man dasselbe folgendermassen zerlegt:

$$\int \frac{g\,dx}{(g^2 - h^2x^2)\sqrt{a + cx^2}} - \int \frac{hx\,dx}{(g^2 - h^2x^2)\sqrt{a + cx^2}},$$

im ersten Integrale die unter Nr. 4 angegebene Substitution benutzt und im zweiten Integrale $\sqrt{a + cx^2} = v$ setzt; man erhält für $k = 1$

$$\int\frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}}$$
$$=\int\frac{g\,du}{g^2-(ah^2+cg^2)u^2}-\int\frac{h\,dv}{ah^2+cg^2-h^2v^2},$$

und hieraus folgende drei Formeln:

$$\int\frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}}=-\frac{1}{2\mu}l\left\{\frac{ah-cgx+\mu\sqrt{a+cx^2}}{ah-cgx-\mu\sqrt{a+cx^2}}\right\},$$
$$ah^2+cg^2>0,\quad \mu=\sqrt{ah^2+cg^2};$$

$$\int\frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}}=\frac{h}{cg}\cdot\frac{\sqrt{a+cx^2}}{g+hx},\quad ah^2+cg^2=0;$$

$$\int\frac{dx}{(g+hx)\sqrt{a+cx^2}}=-\frac{1}{\nu}\,arctan\,\frac{\nu\sqrt{a+cx^2}}{ah-cgx},$$
$$ah^2+cg^2<0,\quad \nu=\sqrt{-(ah^2+cg^2)}.$$

Die Spezialisierungen $a=+1,\ c=+1;\ a=-1,\ c=+1;\ a=+1,\ c=-1$ führen wieder auf die in Nr. 2 erwähnten Integrale zurück.

6. Beachtet man die identische Gleichung

$$\int\frac{dx}{\alpha x+\beta\sqrt{a+cx^2}}$$
$$=\int\frac{\alpha x\,dx}{\alpha^2x^2-\beta^2(a+cx^2)}-\int\frac{\beta\sqrt{a+cx^2}\cdot dx}{\alpha^2x^2-\beta^2(a+cx^2)}$$

und wendet im zweiten Integrale rechter Hand die unter Nr. 4 erwähnte Methode an, so erhält man

$$\int\frac{dx}{\alpha x+\beta\sqrt{a+cx^2}}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2c}\left\{\tfrac{1}{2}\alpha l[(\alpha^2-\beta^2c)x^2-\beta^2a]-\beta\int\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2u^2-\beta^2}+\frac{c}{1-cu^2}\right)du\right\}$$

und nach gehöriger Zusammenrechnung

$$\int\frac{dx}{\alpha x+\beta\sqrt{a+cx^2}}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2c}\left\{\alpha l(\alpha x+\beta\sqrt{a+cx^2})-\beta\sqrt{c}\cdot l(\sqrt{c}\cdot x+\sqrt{a+cx^2})\right\},\quad c>0$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2c}\left\{\alpha l(\alpha x+\beta\sqrt{a+cx^2})+\beta\sqrt{-c}\cdot arcsin\,\frac{\sqrt{-c}\cdot x}{\sqrt{a}}\right\},\quad c<0.$$

7. Bedeutet $F(x, y)$ eine rationale algebraische Funktion von x und y, also im allgemeinen einen Bruch, dessen Zähler aus Summanden von der Form $Ax^m y^n$, und dessen Nenner aus Summanden von der ähnlichen Form $Bx^p y^q$ besteht, so erhellt leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$F(x, \sqrt{a + cx^2}) = \frac{M + N\sqrt{a + cx^2}}{P + Q\sqrt{a + cx^2}},$$

worin M, N, P, Q ganze rationale Funktionen von x sind. Multipliziert man ferner Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches mit $P - Q\sqrt{a + cx^2}$, so erhält man

$$F(x, \sqrt{a + cx^2})$$
$$= \frac{MP - NQ(a + cx^2)}{P^2 - Q^2(a + cx^2)} + \frac{(NP - MQ)(a + cx^2)}{P^2 - Q^2(a + cx^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a + cx^2}}$$
$$= R + S \cdot \frac{1}{\sqrt{a + cx^2}},$$

und hier sind R und S rationale gebrochene Funktionen von x. Die letztere habe die gewöhnliche Form

$$S = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots}$$
$$= \frac{\alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \cdots + x(\alpha_1 + \alpha_3 x^2 + \alpha_5 x^4 + \cdots)}{\beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \cdots + x(\beta_1 + \beta_3 x^2 + \beta_5 x^4 + \cdots)};$$

multipliziert man Zähler und Nenner mit

$$\beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \cdots - x(\beta_1 + \beta_3 x^2 + \beta_5 x^4 + \cdots),$$

so erscheint S in Form eines Bruches, dessen Nenner nur gerade Potenzen von x, und dessen Zähler sowohl gerade als ungerade Potenzen von x enthält; es ist also

$$S = \frac{\gamma_0 + \gamma_2 x^2 + \gamma_4 x^4 + \cdots + x(\gamma_1 + \gamma_3 x^2 + \gamma_5 x^4 + \cdots)}{\delta_0 + \delta_2 x^2 + \delta_4 x^4 + \delta_6 x^6 + \cdots}$$

oder wenn mit dem Nenner in jeden Teil des Zählers dividiert wird

$$S = \varphi(x^2) + x\psi(x^2),$$

wo φ und ψ rationale Funktionen bezeichnen. Nach diesen Erörterungen ist

$$\int F(x, \sqrt{a + cx^2})\, dx = \int R\,dx + \int \frac{\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt{a + cx^2}} + \int \frac{\psi(x^2)\,x\,dx}{\sqrt{a + cx^2}};$$

das erste Integral rechter Hand lässt sich mittels der im § 3 angegebenen Methoden entwickeln; für das zweite Integral benutzt man die Substitution

$$\frac{kx}{\sqrt{a+cx^2}} = u,$$

im dritten setzt man

$$\sqrt{a+cx^2} = v,$$

und bringt somit das gesuchte irrationale Integral auf drei rationale Integrale zurück, nämlich

$$\int F(x, \sqrt{a+cx^2})\,dx$$

$$= \int R\,dx + \int \varphi\left(\frac{au^2}{k^2-cu^2}\right)\frac{k\,du}{k^2-cu^2} + \int \psi\left(\frac{v^2-a}{c}\right)\frac{dv}{c}.$$

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{a+cx^2}}$$

$$= \int \frac{\alpha+(a\gamma-c\alpha)u^2}{a_1+b_1u^2+c_1u^4}\,du - \int \frac{\beta c}{a_2+b_2v^2+c_2v^4}\,dv,$$

$$a_1 = \alpha^2, \quad b_1 = a(2\alpha\gamma-\beta^2) - 2c\alpha^2,$$

$$c_1 = a^2\gamma^2 - ac(2\alpha\gamma-\beta^2) + c^2\alpha^2,$$

$$a_2 = c_1, \quad b_2 = c(2\alpha\gamma-\beta^2) - 2a\gamma^2, \quad c_2 = \gamma^2.$$

8. Benutzt man die identische Gleichung

$$a+bx+cx^2 = a - \frac{b^2}{4c} + c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2$$

und setzt

$$a - \frac{b^2}{4c} = a', \quad x + \frac{b}{2c} = \xi,$$

so erhält man

$$\int F(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx = \int F\left(\xi - \frac{b}{2c}, \sqrt{a'+c\xi^2}\right)d\xi;$$

hier kann rechter Hand wieder die in Nr. 7 erörterte Methode angewendet werden.

Beispielsweise ist

$$\int \frac{dx}{(\lambda+x)\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{d\xi}{(g'+\xi)\sqrt{a'+c\xi^2}}; \quad g' = \lambda - \frac{b}{2c},$$

mithin nach den Formeln in Nr. 5:

$$\int \frac{dx}{(\lambda + x)\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$= -\frac{1}{2\mu} l \left\{ \frac{a - \frac{1}{2}b\lambda + (\frac{1}{2}b - c\lambda)x + \mu\sqrt{a + bx + cx^2}}{a - \frac{1}{2}b\lambda + (\frac{1}{2}b - c\lambda)x - \mu\sqrt{a + bx + cx^2}} \right\},$$

$$a - b\lambda + c\lambda^2 > 0, \quad \mu = \sqrt{a - b\lambda + c\lambda^2};$$

$$\int \frac{dx}{(\lambda + x)\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{2\sqrt{a + bx + cx^2}}{(b - 2c\lambda)(\lambda + x)},$$

$$a - b\lambda + c\lambda^2 = 0;$$

$$\int \frac{dx}{(\lambda + x)\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\nu} \operatorname{arctan} \frac{2\nu\sqrt{a + bx + cx^2}}{2a - b\lambda + (b - 2c\lambda)x},$$

$$a - b\lambda + c\lambda^2 < 0, \quad \nu = \sqrt{-a + b\lambda - c\lambda^2}.$$

§ 6.

Integration exponentialer und logarithmischer Funktionen.

1. Wenn das zu entwickelnde Integral nur die Exponentialgrösse e^{ky} enthält, mithin der Form $\int f(e^{ky})\, dy$ angehört, so erhält es durch die Substitution

$$e^{ky} = x, \quad y = \frac{lx}{k}, \quad dy = \frac{dx}{kx}$$

eine von Exponentialgrössen freie Gestalt. Hiernach sind die folgenden Integrale zu entwickeln:

$$\int \frac{dy}{a + be^{ky}} = \frac{1}{ak}\left\{ky - l(a + be^{ky})\right\},$$

$$\int \frac{dy}{(a + be^{ky})^2} = \frac{1}{a^2k}\left\{ky + \frac{a}{a + be^{ky}} - l(a + be^{ky})\right\},$$

$$\int \frac{dy}{ae^{-ky} + be^{ky}} = \frac{1}{k\sqrt{ab}} \operatorname{arctan}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, e^{ky}\right), \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$\int \frac{dy}{ae^{-ky} + be^{ky}} = \frac{1}{2k\sqrt{-ab}}\, l\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\, .\, e^{ky}}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}\, .\, e^{ky}}\right),$$

$$a > 0, \quad b < 0,$$

$$\int \frac{e^{ky}\, dy}{\sqrt{a + be^{ky}}} = \frac{2}{kb}\sqrt{a + be^{ky}},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a+be^{ky}}} = \frac{1}{k\sqrt{a}}\, l\left(\frac{\sqrt{a+be^{ky}}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{ky}}+\sqrt{a}}\right), \quad a>0,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a+be^{ky}}} = \frac{2}{k\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+be^{ky}}{-a}}, \quad a<0.$$

2. Mittels partieller Integration lässt sich das Integral

$$\int y^m e^{ky}\, dy$$

entwickeln, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet; in jedem anderen Falle muss man eine Reihenentwickelung zu Hilfe nehmen. Die Werte des genannten Integrals sind für $m = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\int y\, e^{ky}\, dy = \left(\frac{y}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e^{ky},$$

$$\int y^2 e^{ky}\, dy = \left(\frac{y^2}{k} - 2\frac{y}{k^2} + 2\frac{1}{k^3}\right) e^{ky},$$

$$\int y^3 e^{ky}\, dy = \left(\frac{y^3}{k} - 3\frac{y^2}{k^2} + 6\frac{y}{k^3} - 6\frac{1}{k^4}\right) e^{ky},$$

$$\int y^4 e^{ky}\, dy = \left(\frac{y^4}{k} - 4\frac{y^3}{k^2} + 12\frac{y^2}{k^3} - 24\frac{y}{k^4} + 24\frac{1}{k^5}\right) e^{ky},$$

$$\int y^5 e^{ky}\, dy = \left(\frac{y^5}{k} - 5\frac{y^4}{k^2} + 20\frac{y^3}{k^3} - 60\frac{y^2}{k^4} + 120\frac{y}{k^5} - 120\frac{1}{k^6}\right) e^{ky}.$$

Hiernach können alle Integrale von der Form

$$\int \varphi(y)\, e^{ky}\, dy$$

entwickelt werden, sobald $\varphi(y)$ eine algebraische ganze und rationale Funktion von y ist.

3. Mit Hilfe der Substitution

$$lz = y, \quad z = e^y, \quad dz = e^y dy,$$

erhält man

$$\int z^\mu f(lz)\, dz = \int e^{(\mu+1)y} f(y)\, dy,$$

also z. B.

$$\int \frac{dz}{z(a+blz)} = \frac{l(a+blz)}{b},$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{a+blz}} = \frac{2\sqrt{a+blz}}{b},$$

$$\int z^\mu \, lz \, dz = z^{\mu+1}\left[\frac{lz}{\mu+1} - \frac{1}{(\mu+1)^2}\right], \quad \mu \gtrless -1,$$

$$\int z^\mu (lz)^2 dz = z^{\mu+1}\left[\frac{(lz)^2}{\mu+1} - \frac{2lz}{(\mu+1)^2} + \frac{2}{(\mu+1)^3}\right], \quad \mu \gtrless -1.$$

4. Durch partielle Integration findet man

$$\int \frac{lz\,dz}{(a+bz)^2} = \frac{1}{a}\left\{\frac{zlz}{a+bz} - \frac{l(a+bz)}{b}\right\},$$

$$\int \frac{l(\alpha+\beta z)}{(a+bz)^2}\,dz = \frac{1}{a\beta - b\alpha}\left\{\frac{\alpha+\beta z}{a+bz} l(\alpha+\beta z) - \frac{\beta}{b} l(a+bz)\right\},$$

$$\int \frac{l(\alpha^2+\beta^2 z^2)}{z^2}\,dz = \frac{2\beta}{\alpha} \operatorname{arctan} \frac{\beta z}{\alpha} - \frac{l(\alpha^2+\beta^2 z^2)}{z},$$

$$\int \frac{lz\,dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b}\left\{(lz-2)\sqrt{a+bz} + \sqrt{a}\,.\,l\left(\frac{\sqrt{a+bz}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bz}-\sqrt{a}}\right)\right\}, \quad a > 0,$$

$$= \frac{2}{b}\left\{(lz-2)\sqrt{a+bz} + 2\sqrt{-a}\,.\,\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{a+bz}{-a}}\right\}, \quad a < 0;$$

$$\int \frac{lz\,dz}{\sqrt{(a+cz^2)^3}} = \frac{zlz}{a\sqrt{a+cz^2}} - \frac{1}{a\sqrt{c}} l(\sqrt{c}\,.\,z + \sqrt{a+cz^2}), \quad c > 0,$$

$$= \frac{zlz}{a\sqrt{a+cz^2}} - \frac{1}{a\sqrt{-c}} \arcsin \frac{\sqrt{-c}\,.\,z}{\sqrt{a}}, \quad c < 0;$$

$$\int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\, l\left(\frac{\alpha+\beta z}{\alpha-\beta z}\right) dz = -\sqrt{1-z^2}\,.\,l\left(\frac{\alpha+\beta z}{\alpha-\beta z}\right)$$

$$+ \frac{2}{\beta}\left\{\alpha \arcsin z - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,.\,\arcsin \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,.\,z}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2 z^2}}\right\}, \quad \alpha^2 > \beta^2.$$

§ 7.

Integration goniometrischer Funktionen.

1. In einfachen Fällen lassen sich Integrale mit goniometrischen Funktionen durch Umformung auf eine der Grundformeln in § 1 bringen (vergl. auch § 5 Nr. 3). So hat man z. B.

1) $\int sin^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (1 - cos\, 2u)\, du = \frac{1}{2}\int du - \frac{1}{4}\int cos\, 2u\, d(2u)$
$= \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} sin\, 2u,$

2) $\int cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (1 + cos\, 2u)\, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} sin\, 2u,$

3) $\int sin^3 u\, du = \frac{1}{4}\int (3\, sin\, u - sin\, 3u)\, du = -\frac{3}{4} cos\, u + \frac{1}{12} cos\, 3u,$

4) $\int cos^3 u\, du = \frac{1}{4}\int (3\, cos\, u + cos\, 3u)\, du = \frac{3}{4} sin\, u + \frac{1}{12} sin\, 3u,$

5) $\int sin\, u\, cos\, u\, du = \frac{1}{2}\int sin\, 2u\, du = -\frac{1}{4} cos\, 2u,$

6) $\int sin^2 u\, cos^2 u\, du = \frac{1}{4}\int sin^2 2u\, du = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 4u)\, du$
$= \frac{1}{8} u - \frac{1}{32} sin\, 4u,$

7) $\int sin^n u\, cos\, u\, du = \int sin^n u\, d(sin\, u) = \frac{1}{n+1} sin^{n+1} u, \quad n \gtrless -1,$

8) $\int sin\, u\, cos^n u\, du = -\int cos^n u\, d(cos\, u) = -\frac{1}{n+1} cos^{n+1} u, \quad n \gtrless -1,$

9) $\int sin^2 u\, cos^3 u\, du = \int sin^2 u\, (1 - sin^2 u)\, d(sin\, u)$
$= \frac{1}{3} sin^3 u - \frac{1}{5} sin^5 u,$

10) $\int sin^3 u\, cos^5 u\, du = \int sin^3 u\, (1 - sin^2 u)^2 d(sin\, u)$
$= \frac{1}{4} sin^4 u - \frac{1}{3} sin^6 u + \frac{1}{8} sin^8 u,$

11) $\int tan\, u\, du = -\int \frac{d(cos\, u)}{cos\, u} = -\, l\, cos\, u,$

12) $\int cot\, u\, du = \int \frac{d(sin\, u)}{sin\, u} = l\, sin\, u,$

13) $\int tan^2 u\, du = \int (sec^2 u - 1)\, du = tan\, u - u,$

14) $\int cot^2 u\, du = \int (csc^2 u - 1)\, du = -\, cot\, u - u,$

15) $\int \frac{du}{sin\, u} = \int \frac{d(\frac{1}{2} u)}{sin\, \frac{1}{2} u\, cos\, \frac{1}{2} u} = \int \frac{d(\frac{1}{2} u)}{tan\, \frac{1}{2} u\, cos^2 \frac{1}{2} u} = l\, tan\, \frac{1}{2} u,$

16) $\int \frac{du}{cos\, u} = \int \frac{d(\frac{1}{2}\pi + u)}{sin\, (\frac{1}{2}\pi + u)} = l\, tan\, (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} u),$

17) $\int \frac{du}{sin\, u\, cos\, u} = \int \frac{d(2u)}{sin\, 2u} = l\, tan\, u,$

18) $\int \frac{du}{sin^2 u\, cos^2 u} = 2\int \frac{d(2u)}{sin^2 2u} = -\, 2\, cot\, 2u,$

oder

$$\int \frac{du}{\sin^2 u \cos^2 u} = \int \frac{du}{\cos^2 u} + \int \frac{du}{\sin^2 u} = \tan u - \cot u,$$

19) $$\int \frac{\sin^n u}{\cos^{n+2} u}\, du = \int \tan^n u\, d(\tan u) = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} u,$$

20) $$\int \frac{\cos^n u}{\sin^{n+2} u}\, du = -\int \cot^n u\, d(\cot u) = -\frac{1}{n+1} \cot^{n+1} u,$$

21) $$\int \frac{\cos^2 u}{\sin u}\, du = \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin u}\, du = l \tan \tfrac{1}{2} u + \cos u,$$

22) $$\int \frac{\cos^3 u}{\sin u}\, du = \int \frac{(1 - \sin^2 u)\, d(\sin u)}{\sin u} = l \sin u - \tfrac{1}{2} \sin^2 u,$$

23) $$\int \frac{\cos^3 u}{\sin^2 u}\, du = \int \frac{(1 - \sin^2 u)\, d(\sin u)}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin u} - \sin u,$$

24) $$\int \frac{\cos^4 u}{\sin^2 u}\, du = \int \frac{(1 - \sin^2 u)^2}{\sin^2 u}\, du = -\cot u - \tfrac{1}{4} \sin 2u - \tfrac{3}{2} u,$$

25) $$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{\cos^5 u}{\sin^3 u}\, du &= \int \frac{(1 - \sin^2 u)^2 d(\sin u)}{\sin^3 u} \\ &= -\frac{1}{2 \sin^2 u} - 2 l \sin u + \tfrac{1}{2} \sin^2 u, \end{aligned} \right.$$

26) $$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{du}{\sin u \cos^2 u} &= \int \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin u \cos^2 u}\, du \\ &= -\int \frac{d(\cos u)}{\cos^2 u} + \int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{\cos u} + l \tan \tfrac{1}{2} u, \end{aligned} \right.$$

27) $$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{du}{\sin u \cos^3 u} &= \int \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin u \cos^3 u}\, du \\ &= -\int \frac{d(\cos u)}{\cos^3 u} + \int \frac{du}{\sin u \cos u} = \frac{1}{2 \cos^2 u} + l \tan u. \end{aligned} \right.$$

2. Um die beiden Integrale

$$J_1 = \int \frac{\cos u\, du}{a \cos u + b \sin u}$$

und

$$J_2 = \int \frac{\sin u\, du}{a \cos u + b \sin u}$$

zu bestimmen, bemerke man, dass

$$aJ_1 + bJ_2 = u,$$
$$bJ_1 - aJ_2 = l(a\cos u + b\sin u)$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man J_1 und J_2. Es ergeben sich

$$\int \frac{\cos u\,du}{a\cos u + b\sin u} = \frac{a}{a^2+b^2}u + \frac{b}{a^2+b^2}l(a\cos u + b\sin u),$$

$$\int \frac{\sin u\,du}{a\cos u + b\sin u} = \frac{b}{a^2+b^2}u - \frac{a}{a^2+b^2}l(a\cos u + b\sin u).$$

3. Es ist

1) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u} = \int \frac{\sec^2 u\,du}{a^2 + b^2\tan^2 u} = \frac{1}{b}\int \frac{d(b\tan u)}{a^2+b^2\tan^2 u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{ab}\operatorname{arctan}\left(\frac{b}{a}\tan u\right), \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{a^2\cos^2 u - b^2\sin^2 u} = \int \frac{\sec^2 u\,du}{a^2 - b^2\tan^2 u} = \frac{1}{b}\int \frac{d(b\tan u)}{a^2-b^2\tan^2 u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{2ab}l\left(\frac{a + b\tan u}{a - b\tan u}\right). \end{cases}$$

Hiernach hat man

3) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{\alpha^2 + \beta^2\cos^2 u} = \int \frac{du}{(\alpha^2+\beta^2)\cos^2 u + \alpha^2\sin^2 u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\operatorname{arctan}\left(\frac{\alpha\tan u}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right); \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{\alpha^2 - \beta^2\cos^2 u} = \int \frac{du}{(\alpha^2-\beta^2)\cos^2 u + \alpha^2\sin^2 u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\operatorname{arctan}\left(\frac{\alpha\tan u}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right), \quad \alpha^2 > \beta^2, \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{\alpha^2 - \beta^2\cos^2 u} = -\int \frac{du}{(\beta^2-\alpha^2)\cos^2 u - \alpha^2\sin^2 u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}l\left(\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2} - \alpha\tan u}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}+\alpha\tan u}\right), \quad \alpha^2 < \beta^2. \end{cases}$$

Hieraus erhält man wieder

6) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{a + b\cos u} = 2\int \frac{d(\frac{1}{2}u)}{(a-b) + 2b\cos^2\frac{1}{2}u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathit{arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\tfrac{1}{2}u\right), \quad a^2 > b^2, \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{a + b\cos u} = -2\int \frac{d(\frac{1}{2}u)}{(b-a) - 2b\cos^2\frac{1}{2}u} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\cdot\tan\frac{1}{2}u}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\cdot\tan\frac{1}{2}u}\right) \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{b + a\cos u + \sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin u}{a + b\cos u}\right), \quad a^2 < b^2. \end{cases}$$

4. Ist in
$$\int \cos^n u\,du, \quad \int \sin^n u\,du$$
die ganze positive Zahl n ungerade $= 2k+1$, so hat man
$$\int \cos^{2k+1} u\,du = \int \cos^{2k} u\,d(\sin u) = \int (1 - \sin^2 u)^k\,d(\sin u),$$
$$\int \sin^{2k+1} u\,du = -\int \sin^{2k} u\,d(\cos u) = -\int (1 - \cos^2 u)^k\,d(\cos u).$$

Z. B. 1) $\int \cos^5 u\,du = \sin u - \frac{2}{3}\sin^3 u + \frac{1}{5}\sin^5 u,$

2) $\int \sin^5 u\,du = -\cos u + \frac{2}{3}\cos^3 u - \frac{1}{5}\cos^5 u.$

Ist dagegen n eine gerade Zahl, so wendet man partielle Integration an und erhält:
$$\int \cos^n u\,du = \int \cos^{n-1} u\,d(\sin u)$$
$$= \cos^{n-1} u \sin u + (n-1)\int \cos^{n-2} u \sin^2 u\,du.$$

Ersetzt man in dem Integral rechts $\sin^2 u$ durch $1 - \cos^2 u$, so ergiebt es durch Zerlegung
$$\int \cos^{n-2} u\,du - \int \cos^n u\,du,$$
also erhält man die Reduktionsformel
$$\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du,$$
und auf dieselbe Weise behandelt
$$\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du.$$

Z. B. 3) $\int cos^4 u du = \frac{1}{4} cos^3 u \sin u + \frac{3}{8} \cos u \sin u + \frac{3}{8} u,$

4) $\int cos^6 u du = \frac{1}{6} cos^5 u \sin u + \frac{5}{24} cos^3 u \sin u + \frac{5}{16} \cos u \sin u + \frac{5}{16} u;$

5) $\int sin^4 u du = - \frac{1}{4} sin^3 u \cos u - \frac{3}{8} \sin u \cos u + \frac{3}{8} u,$

6) $\int sin^6 u du = - \frac{1}{6} sin^5 u \cos u - \frac{5}{24} sin^3 u \cos u - \frac{5}{16} \sin u \cos u + \frac{5}{16} u.$

Auf diese Integrale lässt sich auch

$$\int sin^m u \, cos^n u \, du$$

zurückführen, wenn m und n positive gerade Zahlen sind. So erhält man z. B.

$$7) \begin{cases} \int sin^2 u \, cos^4 u du = \int (1 - cos^2 u) cos^4 u du = \int cos^4 u du - \int cos^6 u du \\ = - \frac{1}{6} cos^5 u \sin u + \frac{1}{24} cos^3 u \sin u + \frac{1}{16} \cos u \sin u + \frac{1}{16} u, \end{cases}$$

oder

$$8) \begin{cases} \int sin^2 u \, cos^4 u du = \int sin^2 u (1 - sin^2 u)^2 du \\ = \int sin^2 u du - 2 \int sin^4 u du + \int sin^6 u du \\ = - \frac{1}{6} sin^5 u \cos u + \frac{1}{24} sin^3 u \cos u - \frac{1}{16} \sin u \cos u + \frac{1}{16} u. \end{cases}$$

5. Ist in

$$\int \frac{du}{cos^n u}, \quad \int \frac{du}{sin^n u}$$

die ganze positive Zahl n gerade $= 2k$, so kann man schreiben

$$\int \frac{du}{cos^{2k} u} = \int \frac{du}{cos^2 u \, cos^{2k-2} u} = \int (1 + tan^2 u)^{k-1} d(\tan u),$$

$$\int \frac{du}{sin^{2k} u} = \int \frac{du}{sin^2 u \, sin^{2k-2} u} = - \int (1 + cot^2 u)^{k-1} d(\cot u).$$

Z. B. 1) $\int \frac{du}{cos^4 u} = \int (1 + tan^2 u) d(\tan u) = \tan u + \frac{1}{3} tan^3 u,$

2) $\int \frac{du}{cos^6 u} = \tan u + \frac{2}{3} tan^3 u + \frac{1}{5} tan^5 u;$

3) $\int \frac{du}{sin^4 u} = - \cot u - \frac{1}{3} cot^3 u,$

4) $\int \frac{du}{sin^6 u} = - \cot u - \frac{2}{3} cot^3 u - \frac{1}{5} cot^5 u.$

Ist dagegen n ungerade, so giebt die Reduktionsformel in Nr. 4, wenn man $-n+2$ statt n setzt

$$\int \frac{du}{\cos^{n-2} u} = -\frac{\sin u}{(n-2)\cos^{n-1} u} + \frac{n-1}{n-2}\int \frac{du}{\cos^n u},$$

also

$$\int \frac{du}{\cos^n u} = \frac{\sin u}{(n-1)\cos^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^{n-2} u},$$

und auf gleiche Weise

$$\int \frac{du}{\sin^n u} = -\frac{\cos u}{(n-1)\sin^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\sin^{n-2} u}.$$

Z. B. 5) $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^3 u} = \frac{1}{2}\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \frac{1}{2}\, l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right),$

6) $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^5 u} = \frac{1}{4}\frac{\sin u}{\cos^4 u} + \frac{3}{8}\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \frac{3}{8}\, l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right);$

7) $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^3 u} = -\frac{1}{2}\frac{\cos u}{\sin^2 u} + \frac{1}{2}\, l \tan \tfrac{1}{2}u,$

8) $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^5 u} = -\frac{1}{4}\frac{\cos u}{\sin^4 u} - \frac{3}{8}\frac{\cos u}{\sin^2 u} + \frac{3}{8}\, l \tan \tfrac{1}{2}u.$

Auf diese Integrale lässt sich auch

$$\int \frac{\sin^m u}{\cos^n u}\,du \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos^m u}{\sin^n u}\,du$$

zurückführen, wenn die Zahlen m und n positiv sind und m gerade ist. Z. B.

9) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sin^4 u}{\cos^5 u}\,du = \int \frac{(1-\cos^2 u)^2}{\cos^5 u}\,du = \int \frac{du}{\cos^5 u} - 2\int \frac{du}{\cos^3 u} \\ \displaystyle + \int \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{4}\frac{\sin u}{\cos^4 u} - \frac{5}{8}\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \frac{3}{8}\, l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right), \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\cos^6 u}{\sin^5 u}\,du = \int \frac{(1-\sin^2 u)^3}{\sin^5 u}\,du = \int \frac{du}{\sin^5 u} - 3\int \frac{du}{\sin^3 u} + 3\int \frac{du}{\sin u} \\ \displaystyle - \int \sin u\,du = -\frac{1}{4}\frac{\cos u}{\sin^4 u} + \frac{9}{8}\frac{\cos u}{\sin^2 u} + \cos u + \frac{15}{8}\, l \tan \tfrac{1}{2}u. \end{cases}$$

6. Man kann umformen:

$$\int tan^n u\,du = \int tan^{n-2} u\,(sec^2 u - 1)\,du = \int tan^{n-2} u\,d\,(tan\ u)$$

$$-\int tan^{n-2} u\,du = \frac{1}{n-1}\,tan^{n-1} u - \int tan^{n-2} u\,du,$$

und ebenso

$$\int cot^n u\,du = \int cot^{n-2} u\,(csc^2 u - 1)\,du = -\int cot^{n-2} u\,d\,(cot\ u)$$

$$-\int cot^{n-2} u\,du = -\frac{1}{n-1}\,cot^{n-1} u - \int cot^{n-2} u\,du.$$

Z. B.

$$\int tan^3 u\,du = \tfrac{1}{2}\,tan^2 u + l\,cos\,u,$$

$$\int tan^4 u\,du = \tfrac{1}{3}\,tan^3 u - tan\,u + u,$$

$$\int tan^5 u\,du = \tfrac{1}{4}\,tan^4 u - \tfrac{1}{2}\,tan^2 u - l\,cos\,u,$$

$$\int tan^6 u\,du = \tfrac{1}{5}\,tan^5 u - \tfrac{1}{3}\,tan^3 u + tan\,u - u;$$

$$\int cot^3 u\,du = -\tfrac{1}{2}\,cot^2 u - l\,sin\,u,$$

$$\int cot^4 u\,du = -\tfrac{1}{3}\,cot^3 u + cot\,u + u,$$

$$\int cot^5 u\,du = -\tfrac{1}{4}\,cot^4 u + \tfrac{1}{2}\,cot^2 u + l\,sin\,u,$$

$$\int cot^6 u\,du = -\tfrac{1}{5}\,cot^5 u + \tfrac{1}{3}\,cot^3 u - cot\,u - u.$$

7. Man kann

$$\int sin^m u\,cos^n u\,du,$$

wenn m und n ganze, positive oder negative Zahlen sind, auch durch Reduktionsformeln behandeln.

I. Durch partielle Integration findet man:

$$\int sin^m u\,cos^n u\,du = \frac{1}{m+1}\int cos^{n-1} u\,d(sin^{m+1} u)$$

$$= \frac{sin^{m+1} u\,cos^{n-1} u}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int sin^{m+2} u\,cos^{n-2} u\,du,$$

oder auch

$$\int sin^m u\,cos^n u\,du = -\frac{1}{n+1}\int sin^{m-1} u\,d(cos^{n+1} u)$$

$$= -\frac{sin^{m-1} u\,cos^{n+1} u}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int sin^{m-2} u\,cos^{n+2} u\,du.$$

Die erste Reduktionsformel kann angewendet werden, wenn m negativ, n positiv; die zweite, wenn m positiv, n negativ ist.

II. Zerlegt man die in I auf der rechten Seite stehenden Integrale, indem man

$$\sin^{m+2} u = \sin^m u\,(1 - \cos^2 u)$$

und

$$\cos^{n+2} u = \cos^n u\,(1 - \sin^2 u)$$

setzt, so erhält man

$$\int \sin^m u \cos^n u\, du = \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m u \cos^{n-2} u\, du,$$

und

$$\int \sin^m u \cos^n u\, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} u \cos^n u\, du.$$

Diese Reduktionsformeln dienen für den Fall, dass m und n positiv sind.

III. Setzt man in den Formeln II $n+2$ statt n, bez. $m+2$ statt m, und reduziert auf die rechtsstehenden Integrale, so ergeben sich die Reduktionsformeln:

$$\int \sin^m u \cos^n u\, du = -\frac{\sin^{m+1} u \cos^{n+1} u}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m u \cos^{n+2} u\, du$$

und

$$\int \sin^m u \cos^n u\, du = \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n+1} u}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} u \cos^n u\, du,$$

die vorteilhaft sind für negative m und n.

Beispiele.

1) $$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\cos^6 u}{\sin^2 u}\, du = -\frac{\cos^5 u}{\sin u} - 5\int \cos^4 u\, du \\ \displaystyle\qquad = -\frac{\cos^5 u}{\sin u} - \tfrac{5}{4}\cos^3 u \sin u - \tfrac{15}{8}\cos u \sin u - \tfrac{15}{8} u, \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \int \frac{\cos^8 u}{\sin^4 u} du = -\frac{1}{3}\frac{\cos^7 u}{\sin^3 u} - \frac{7}{3}\int \frac{\cos^6 u}{\sin^2 u} du \\ = -\frac{1}{3}\frac{\cos^7 u}{\sin^3 u} + \frac{7}{3}\frac{\cos^5 u}{\sin u} + \frac{35}{12}\cos^3 u \sin u + \frac{35}{8}\cos u \sin u + \frac{35}{8} u, \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \int \sin^2 u \cos^6 u\, du = -\frac{1}{8}\cos^7 u \sin u + \frac{1}{8}\int \cos^6 u\, du \\ = -\frac{1}{8}\cos^7 u \sin u + \frac{1}{48}\cos^5 u \sin u \\ + \frac{5}{192}\cos^3 u \sin u + \frac{5}{128}\cos u \sin u + \frac{5}{128} u, \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \int \sin^4 u \cos^6 u\, du = -\frac{1}{10}\cos^7 u \sin^3 u + \frac{3}{10}\int \sin^2 u \cos^6 u\, du \\ = \frac{1}{10}\cos^9 u \sin u - \frac{11}{80}\cos^7 u \sin u + \frac{1}{160}\cos^5 u \sin u \\ + \frac{1}{128}\cos^3 u \sin u + \frac{3}{256}\cos u \sin u + \frac{3}{256} u, \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \int \frac{du}{\sin u \cos^4 u} = \frac{1}{3\cos^3 u} + \int \frac{du}{\sin u \cos^2 u} \\ = \frac{1}{3\cos^3 u} + \frac{1}{\cos u} + l \tan \frac{1}{2} u, \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} \int \frac{du}{\sin u \cos^5 u} = \frac{1}{4\cos^4 u} + \int \frac{du}{\sin u \cos^3 u} \\ = \frac{1}{4\cos^4 u} + \frac{1}{2\cos^2 u} + l \tan u, \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \int \frac{du}{\sin^2 u \cos^3 u} = -\frac{1}{\sin u \cos^2 u} + 3\int \frac{du}{\cos^3 u} \\ = -\frac{1}{\sin u \cos^2 u} + \frac{3}{2}\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \frac{3}{2} l \tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} u), \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} \int \frac{du}{\sin^3 u \cos^5 u} = -\frac{1}{2\sin^2 u \cos^4 u} + 3\int \frac{du}{\sin u \cos^5 u} \\ = -\frac{1}{2\sin^2 u \cos^4 u} + \frac{3}{4\cos^4 u} + \frac{3}{2\cos^2 u} + 3 l \tan u. \end{cases}$$

8. Wenn mehrere goniometrische Funktionen in einem Integral vorkommen, so ist meistenteils die Substitution

$$\tan \frac{1}{2} u = t$$

am bequemsten, aus welcher folgt

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad du = \frac{2\,dt}{1+t^2};$$

enthält nämlich das ursprüngliche Integral keine Wurzel, so ist dann auch das neue, auf t bezügliche Integral von Wurzeln frei.

Mittels dieser Substitution erhält man

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}} \, l \left\{ \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} - \gamma + (\beta - \alpha) \tan \frac{1}{2} u}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} + \gamma - (\beta - \alpha) \tan \frac{1}{2} u} \right\}, \quad \text{für } \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2,$$

$$= -\frac{1}{\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u}, \quad \text{für } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}} \operatorname{arctan} \frac{\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}}, \quad \text{für } \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Für $\alpha = \beta$ gelten diese Formeln nicht; es ist dann

$$\int \frac{du}{\alpha(1 + \cos u) + \gamma \sin u} = \frac{1}{\gamma} \, l(\alpha + \gamma \tan \tfrac{1}{2} u).$$

9. Unter Rücksicht auf die Reduktionsformel (§ 2 Nr. 13 und 14)

$$\int \frac{(1 + x^2) dx}{(a + bx + cx^2)^2} = \int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^2} + \int \frac{x^2 dx}{(a + bx + cx^2)^2}$$

$$= \frac{1}{c(4ac - b^2)} \left\{ \frac{(a + c)b + (b^2 - 2ac + 2c^2)x}{a + bx + cx^2} + 2c(a + c) \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} \right\}$$

findet man mittels der vorigen Substitution

$$\int \frac{du}{(\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)} \left\{ \frac{\alpha\gamma(1 + \cos u) + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta) \sin u}{\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u} + \alpha(\alpha - \beta) \int \frac{du}{\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u} \right\},$$

wobei weder $\alpha = \beta$ noch $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ sein darf. Für diese speziellen Fälle ist

$$\int \frac{du}{[\alpha(1 + \cos u) + \gamma \sin u]^2}$$

$$= \frac{1}{\gamma^3} \left\{ \frac{\gamma(\alpha \sin u - \gamma \cos u)}{\alpha(1 + \cos u) + \gamma \sin u} - \alpha l(\alpha + \gamma \tan \tfrac{1}{2} u) \right\},$$

$$\int \frac{du}{(\alpha + \beta \cos u + \gamma \sin u)^2}$$

$$= -\frac{\tan \frac{1}{2} u}{[\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u]^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{[\gamma + (\alpha - \beta) \tan \frac{1}{2} u]^3}, \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

10. Durch partielle Integration erhält man

$$\int u^m \cos u\, du = u^m \sin u - m \int u^{m-1} \sin u\, du$$

$$= u^m \sin u + m u^{m-1} \cos u - m(m-1) \int u^{m-2} \cos u\, du.$$

Z. B. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \sin u,$

$$\int u^2 \cos u\, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \sin u,$$

$$\int u^3 \cos u\, du = (3u^2 - 6) \cos u + (u^3 - 6u) \sin u,$$

$$\int u^4 \cos u\, du = (4u^3 - 24) \cos u + (u^4 - 12 u^2 + 24) \sin u.$$

Nach demselben Verfahren ergiebt sich

$$\int u^m \sin u\, du = - u^m \cos u + m \int u^{m-1} \cos u\, du$$

$$= - u^m \cos u + m u^{m-1} \sin u - m(m-1) \int u^{m-2} \sin u\, du.$$

Z. B. $\int u \sin u\, du = \sin u - u \cos u,$

$$\int u^2 \sin u\, du = 2u \sin u - (u^2 - 2) \cos u,$$

$$\int u^3 \sin u\, du = (3u^2 - 6) \sin u - (u^3 - 6u) \cos u,$$

$$\int u^4 \sin u\, du = (4u^3 - 24u) \sin u - (4u^4 - 12u^2 + 24) \cos u.$$

11. Es sei

$$J_1 = \int e^{au} \cos bu\, du, \quad J_2 = \int e^{au} \sin bu\, du.$$

Das erste Integral lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{b} \int e^{au}\, d(\sin bu) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} \int \cos bu\, d(e^{au});$$

wendet man in beiden Fällen partielle Integration an, so erhält man:

$$J_1 = \frac{1}{b} e^{au} \sin bu - \frac{a}{b} J_2,$$

$$J_1 = \frac{1}{a} e^{au} \cos bu + \frac{b}{a} J_2,$$

aus welchen beiden Gleichungen sich die gesuchten Integrale ergeben, nämlich:

$$\int e^{au} \cos bu\, du = e^{au} \frac{a \cos bu + b \sin bu}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{au} \sin bu\, du = e^{au} \frac{a \sin bu - b \cos bu}{a^2 + b^2}.$$

Weiter erhält man durch partielle Integration:

$$\int u e^{ku} \cos u\, du = u e^{ku} \frac{k \cos u + \sin u}{k^2 + 1} - e^{ku} \frac{(k^2 - 1) \cos u - 2k \sin u}{(k^2 + 1)^2},$$

$$\int u e^{ku} \sin u\, du = u e^{ku} \frac{k \sin u - \cos u}{k^2 + 1} - e^{ku} \frac{(k^2 - 1) \sin u - 2k \cos u}{(k^2 + 1)^2},$$

$$\int u^2 e^{ku} \cos u\, du = u^2 e^{ku} \frac{k \cos u + \sin u}{k^2 + 1} - \frac{2k}{k^2 + 1} \int u e^{ku} \cos u\, du$$

$$- \frac{2}{k^2 + 1} \int u e^{ku} \sin u\, du,$$

$$\int u^2 e^{ku} \sin u\, du = u^2 e^{ku} \frac{k \sin u - \cos u}{k^2 + 1} + \frac{2}{k^2 + 1} \int u e^{ku} \cos u\, du$$

$$- \frac{2k}{k^2 + 1} \int u e^{ku} \sin u\, du.$$

Wenn zu bestimmen sind

$$J_1 = \int e^{ku} \cos^2 u\, du, \quad J_2 = \int e^{ku} \sin^2 u\, du,$$

so findet man

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{k} e^{ku},$$

$$J_1 - J_2 = e^{ku} \frac{k \cos 2u + 2 \sin 2u}{k^2 + 4}$$

$$= 2 e^{ku} \frac{\cos u\, (k \cos u + 2 \sin u)}{k^2 + 4} - \frac{k}{k^2 + 4} e^{ku};$$

aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$\int e^{ku} \cos^2 u\, du = e^{ku} \frac{\cos u\, (k \cos u + 2 \sin u)}{k^2 + 4} + \frac{2 e^{ku}}{k(k^2 + 4)},$$

$$\int e^{ku} \sin^2 u\, du = e^{ku} \frac{\sin u\, (k \sin u - 2 \cos u)}{k^2 + 4} + \frac{2 e^{ku}}{k(k^2 + 4)}.$$

Allgemein ergeben sich durch partielle Integration die Reduktionsformeln:

$$\int e^{ku} \cos^n u\, du = e^{ku} \frac{\cos^{n-1} u\,(k \cos u + n \sin u)}{k^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{k^2+n^2} \int e^{ku} \cos^{n-2} u\, du,$$

$$\int e^{ku} \sin^n u\, du = e^{ku} \frac{\sin^{n-1} u\,(k \sin u - n \cos u)}{k^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{k^2+n^2} \int e^{ku} \sin^{n-2} u\, du.$$

§ 8.

Integration cyklometrischer Funktionen.

1. Durch partielle Integration erhält man:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2),$$

$$\int \operatorname{arccot} x\, dx = x \operatorname{arccot} x + \tfrac{1}{2} l(1+x^2).$$

2. Auf gleiche Weise erhält man allgemeiner für $n \gtrless -1$

$$\int x^n \arcsin x\, dx = \frac{x^{n+1} \arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int x^n \arccos x\, dx = \frac{x^{n+1} \arccos x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int x^n \arctan x\, dx = \frac{x^{n+1} \arctan x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2},$$

$$\int x^n \operatorname{arccot} x\, dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arccot} x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2},$$

also z. B.

$$\int x \arcsin x\, dx = \tfrac{1}{4}\{(2x^2-1) \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\},$$

$$\int x^2 \arcsin x\, dx = \tfrac{1}{9}\{3x^3 \arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}\},$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx = l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \frac{\arcsin x}{x},$$

$$\int x \arctan x\, dx = \tfrac{1}{2}\{(x^2+1) \arctan x - x\},$$

$$\int x^2 \arctan x\, dx = \tfrac{1}{6}\{2x^3 \arctan x - x^2 - l(1+x^2)\},$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx = lx - \tfrac{1}{2} l(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x},$$

$$\int \frac{arctan\, x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\cdot arctan\, x + \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{2x}+x}{1-\sqrt{2x}+x}\right)$$
$$-\sqrt{2}\left\{arctan\,(\sqrt{2x}+1) + arctan\,(\sqrt{2x}-1)\right\},$$

$$\int \frac{arctan\, x}{\sqrt{x^3}}\,dx = -\,2\,\frac{arctan\, x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{2x}+x}{1-\sqrt{2x}+x}\right)$$
$$+\sqrt{2}\left\{arctan\,(\sqrt{2x}+1) + arctan\,(\sqrt{2x}-1)\right\}.$$

3. Gleichfalls durch partielle Integration findet man

$$\int \frac{arcsin\, x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{arcsin\, x}{1+x} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\int \frac{arcsin\, x}{(\alpha+\beta x)^2}\,dx = -\frac{arcsin\, x}{\beta(\alpha+\beta x)} - \frac{2}{\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\, arctan \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(1-x)}{(\alpha+\beta)(1+x)}},$$
$$\alpha^2 > \beta^2,$$

$$= -\frac{arcsin\, x}{\beta(\alpha+\beta x)} - \frac{1}{\beta\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{(\beta+\alpha)(1+x)}+\sqrt{(\beta-\alpha)(1-x)}}{\sqrt{(\beta+\alpha)(1+x)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(1-x)}}\right),$$
$$\alpha^2 < \beta^2,$$

$$\int \frac{x\, arcsin\, x}{(1-x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{arcsin\, x}{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right\},$$

$$\int \frac{x\, arcsin\, x}{(1+\gamma x^2)^2}\,dx = -\frac{arcsin\, x}{2\gamma(1+\gamma x^2)} + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma+1}}\, arctan\, \frac{\sqrt{\gamma+1}\cdot x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\gamma > -1,$$

$$= -\frac{arcsin\, x}{2\gamma(1+\gamma x^2)} + \frac{1}{\gamma\sqrt{-(\gamma+1)}}\, l\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{-(\gamma+1)}\cdot x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{-(\gamma+1)}\cdot x}\right\},$$
$$\gamma < -1.$$

$$\int \frac{arctan\, x}{(\alpha+\beta x)^2}\,dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{l\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{\beta-\alpha x}{\alpha+\beta x}\, arctan\, x\right\},$$

$$\int \frac{arctan\, x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx = \frac{1+x\, arctan\, x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int \frac{arctan\, x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}\,dx = \frac{x\, arctan\, x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b-a}}\, arctan \sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}},$$
$$a < b,$$

$$= \frac{x\, arctan\, x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{a-b}}\, l\left(\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a-b}}\right), \qquad a > b.$$

4. Mittels der Substitution $arcsin\, x = u$ findet man die Werte folgender Integrale:

$$\int (arcsin\, x)^2\, dx = x\,(arcsin\, x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\,.\, arcsin\, x,$$

$$\int e^{k\, arcsin\, x}\, dx = \frac{e^{k\, arcsin\, x}\,(x + k\sqrt{1-x^2})}{k^2+1}.$$

§ 9.

Integration mittels unendlicher Reihen.

Wenn es durch die bisher angegebenen Methoden nicht gelingt, ein vorgelegtes Integral zu berechnen, d. h. es durch eine endliche Anzahl bekannter Funktionen auszudrücken, so ist durch dasselbe eine neue transzendente Funktion definiert. Die Zurückführung auf bekannte Funktionen ist dann nur möglich durch Entwicklung der Funktion unter dem Integralzeichen in eine unendliche Reihe.

1. Durch unmittelbare Anwendung des binomischen Satzes erhält man, vorausgesetzt dass $x^2 < 1$ ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^9}{9} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^{13}}{13} + \cdots$$

Zerlegt man dagegen $(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ in $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und entwickelt den ersten Faktor in eine Reihe, so findet man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = P_0 - \frac{1}{2}P_2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}P_4 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}P_6 + \cdots,$$

wobei die mit P_0, P_2, $P_4, \ldots$ bezeichneten Integrale auf folgende Weise zu berechnen sind:

$$P_0 = arcsin\, x, \quad P_n = \frac{(n-1)P_{n-2} - x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}.$$

Nur bei kleinen x konvergieren diese Reihen rasch genug für die numerische Berechnung; ist dagegen x nur wenig kleiner als die Einheit, so setze man $x = \sqrt{1-y^2}$ und entwickle in der Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\frac{1}{2}y^2)}}$$

den Faktor $(1-\frac{1}{2}y^2)^{-\frac{1}{2}}$; dies giebt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{Q_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_2}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{Q_4}{2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{Q_6}{2^3} + \cdots\right\},$$

$$Q_0 = \arccos x, \quad Q_n = \frac{(n-1)Q_{n-2} - x\sqrt{(1-x^2)^{n-1}}}{n}.$$

2. Bei der Entwicklung des Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^{-4}}}$$

sind die Fälle $x^2 < 1$ und $x^2 > 1$ zu unterscheiden; für $x^2 < 1$ erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^9}{9} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^{13}}{13} + \cdots,$$

dagegen ist für $x^2 > 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5x^5} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{9x^9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{13x^{13}} + \cdots$$

Um eine andere Entwicklung zu gewinnen, welche die Unterscheidung der obigen Fälle nicht erfordert, beachte man die identische Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

und substituiere

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{2x}{1+x^2} = y,$$

wodurch sich ergiebt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\frac{1}{2}y^2)}}, \qquad y^2 < 1.$$

Man erhält jetzt ähnlich wie in Nr. 1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\left\{R_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{R_2}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{R_4}{2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{R_6}{2^3} + \cdots\right\},$$

$$R_0 = 2\arctan x, \quad R_n = \frac{1}{n}\left\{(n-1)R_{n-2} - \frac{1-x^2}{1+x^2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{n-1}\right\}.$$

3. Unter den Bedingungen $\varepsilon^2 < 1$ und $x^2 < 1$ gilt eine Reihenentwicklung von folgender Form:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon x+x^2}}=1-\frac{c_1}{1}x+\frac{c_2}{1.2}x^2-\frac{c_3}{1.2.3}x^3+\cdots,$$

worin sich die Koeffizienten c_1, c_2 u. s. w. ebensowohl rekurrierend als independent bestimmen lassen. Zu dem ersten Zwecke benutzt man die Aufgabe 22, S. 302 des I. Teiles (4. Auflage) für

$$\mu=-\tfrac{1}{2},\quad a_1=2\varepsilon,\quad a_2=1,\quad a_3=a_4\ldots=0,$$

$$b_n=\frac{(-1)^n c_n}{1.2.3\ldots n}$$

und erhält

$$\begin{aligned}
c_1&=\varepsilon,\\
c_2&=3\varepsilon^2-1,\\
c_3&=15\varepsilon^3-9\varepsilon,\\
c_4&=105\varepsilon^4-90\varepsilon^2+9,\\
c_5&=945\varepsilon^5-1050\varepsilon^2+225\varepsilon,\\
c_6&=10395\varepsilon^6-14175\varepsilon^4+4725\varepsilon^2-225,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder allgemein

$$c_n=(2n-1)\varepsilon c_{n-1}-(n-1)^2c_{n-2};$$

zur independenten Bestimmung dient die letzte Formel des Abschnitts b) auf S. 52 des I. Teiles, welche liefert

$$c_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{d^n[(\varepsilon^2-1)^n]}{d\varepsilon^n}.$$

Hieraus ergiebt sich für $\varepsilon^2<1$ und $z^2<1$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+2\varepsilon z^2+z^4}}$$

$$=\frac{z}{1}-\frac{c_1}{1}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{c_2}{1.2}\cdot\frac{z^5}{5}-\frac{c_3}{1.2.3}\cdot\frac{z^7}{7}+\cdots,$$

dagegen für $\varepsilon^2<1$ und $z^2>1$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+2\varepsilon z^2+z^4}}$$

$$=-\frac{1}{z}+\frac{c_1}{1}\cdot\frac{1}{3z^3}-\frac{c_2}{1.2}\cdot\frac{1}{5z^5}+\frac{c_3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7z^7}-\cdots.$$

4. Wenn $x^2 < 1$ ist, so hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2+x^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{b_1 x^2}{2} + \frac{b_2 x^3}{3} + \frac{b_3 x^4}{4} + \cdots,$$
$$b_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_2 = -\tfrac{1}{8}, \quad b_3 = -\tfrac{1}{16}, \quad b_4 = +\tfrac{59}{128}, \cdots$$
$$b_n = -\frac{(2n-1)b_{n-1} + (2n-2)b_{n-2} + (2n-3)b_{n-3}}{2n}.$$

Im Falle $x^2 > 1$ setze man $\frac{1}{x} = \xi$, wodurch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2+x^3}} = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}\,.\sqrt{1+\xi+\xi^2+\xi^3}}$$

wird, und entwickle $(1+\xi+\xi^2+\xi^3)^{-\frac{1}{2}}$; man erhält

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2+x^3}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}\left\{1 + \frac{b_1}{3x} + \frac{b_2}{5x^2} + \frac{b_3}{7x^3} + \cdots\right\}.$$

Um eine andere Entwicklung zu erhalten, substituiere man erst $1 + x = y^2$; es wird dann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2+\frac{1}{2}y^4}}$$

und hieraus folgt für $\frac{1}{2}y^4 = z^4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \sqrt[4]{8}\int \frac{dz}{\sqrt{1+2\varepsilon z^2+z^4}},$$
$$\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Nunmehr können die in Nr. 3 gegebenen Entwicklungen benutzt werden, wobei die Fälle $x < \sqrt{2} - 1$ und $x > \sqrt{2} - 1$ zu unterscheiden sind.

5. Das allgemeinere Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta^2 x^2)}}$$

lässt sich auf vier verschiedene Weisen in Reihen verwandeln.

Im Falle $\alpha^2 x^2 < 1$ entwickelt man den Faktor $(1+\alpha x)^{-\frac{1}{2}}$, für $\beta^2 x^2 < 1$ den zweiten Faktor $(1+\beta^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}$; ist gleichzeitig $\alpha^2 x^2 < 1$

und $\beta^2 x^2 < 1$, so entwickelt man beide Faktoren und multipliziert die erhaltenen Reihen; endlich gelangt man durch Anwendung der Substitution

$$\sqrt{1 + \alpha x} = y, \quad x = \frac{y^2 - 1}{\alpha}$$

zu der Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + \alpha x)(1 + \beta^2 x^2)}} = 2 \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta^2 y^2 + \beta^2 y^4}},$$

welche für

$$y^3 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} z^4$$

übergeht in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + \alpha x)(1 + \beta^2 x^2)}} = \frac{2}{\sqrt[4]{\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 + 2\varepsilon z^2 + z^4}},$$

$$\varepsilon = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\beta(1 + \alpha x)}}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Hier können wieder die in Nr. 2 gegebenen Entwicklungen benutzt werden.

6. Unter den Voraussetzungen $\lambda^2 < 1$ und $x^2 < 1$ hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \lambda x^2)}} = \frac{x}{1} + \frac{b_1 x^3}{3} + \frac{b_2 x^5}{5} + \cdots,$$

$$b_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \lambda),$$
$$b_2 = \tfrac{1}{8}(3 + 2\lambda + 3\lambda^2),$$
$$b_3 = \tfrac{1}{16}(5 + 3\lambda + 3\lambda^2 + 5\lambda^3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Will man das obige Integral nicht nach Potenzen von x, sondern nach Potenzen von λ entwickeln, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \lambda x^2)}}$$
$$= P_0 + \frac{1}{2} P_2 \lambda + \frac{1.3}{2.4} P_4 \lambda^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} P_6 \lambda^3 + \cdots,$$

wo P_0, P_2, P_4 u.s.w. dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 1.

Eine dritte Entwicklung ergiebt sich, wenn man erst die Substitution

$$\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = z \quad \text{oder} \quad x = \frac{2z}{1 + z^2}$$

anwendet, wodurch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{1+2(1-2\lambda)z^2+z^4}}$$

wird, und nachher von den Formeln in Nr. 2 Gebrauch macht; man findet bei positiven echt gebrochenen λ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}}$$

$$= 2\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{A_1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + \frac{A_2}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 - \cdots\right\},$$

$$A_1 = 1 - 2\lambda,$$
$$A_2 = 1 - 6\lambda + 6\lambda^2,$$
$$A_3 = 1 - 12\lambda + 30\lambda^2 - 20\lambda^3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$A_n = \frac{(2n-1)(1-2\lambda)A_{n-1} - (n-1)A_{n-2}}{n}$$

oder auch unter independenter Form

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n[\lambda^n(1-\lambda)^n]}{d\lambda^n}$$

$$= 1 - (n)_1(n+1)_1\lambda + (n)_2(n+2)_2\lambda^2 - (n)_3(n+3)_3\lambda^3 + \cdots$$

7. Die vorigen Transformationen passen ferner auf das Integral

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}};$$

namentlich ergiebt die zuletzt erwähnte Substitution

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}} = 8\int \frac{z^2dz}{\sqrt{[1+2(1-2\lambda)z^2+z^4]^3}}.$$

Um den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck nach Potenzen von z zu entwickeln, benutze man entweder die Aufgabe 22, S. 302 des I. Teiles für $\mu = -\frac{3}{2}$ oder man differenziere die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+2(1-2\lambda)z^2+z^4}} = 1 - A_1z^2 + A_2z^4 - A_3z^6 + \cdots$$

partiell in Beziehung auf λ; man erhält schliesslich

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}}$$

$$= 8\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 - \frac{B_1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + \frac{B_2}{7}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^7 - \cdots\right\},$$

$$B_1 = 3(1-2\lambda),$$
$$B_2 = 6(1-5\lambda+5\lambda^2),$$
$$B_3 = 10(1-9\lambda+21\lambda^2-14\lambda^3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_n = \frac{(2n+1)(1-2\lambda)B_{n-1}-(n+1)B_{n-2}}{n}$$

oder independent ausgedrückt

$$B_{n-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^{n+1}[\lambda^n(1-\lambda)^n]}{d\lambda^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\{1(n)_1(n+1)_1 - 2(n)_2(n+2)_2\lambda + 3(n)_3(n+3)_3\lambda^2 - \cdots\}.$$

8. Nach den vorigen Methoden kann auch das Integral

$$\int\sqrt{\frac{1-\lambda x^2}{1-x^2}}\,dx$$

behandelt werden, welches sich übrigens auf zwei früher entwickelte Integrale zurückführen lässt. Es gilt nämlich folgende, durch Differentiation leicht zu prüfende Gleichung:

$$\int\sqrt{\frac{1-\lambda x^2}{1-x^2}}\,dx = \lambda x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\lambda x^2}}$$

$$+ (1-\lambda)\left\{\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} + \lambda\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)^3}}\right\},$$

und hier können die Integrale rechter Hand nach Nr. 6 und 7 entwickelt werden. Setzt man $A_n - 4\lambda B_{n-1} = C_n$, so erhält man

$$\int\sqrt{\frac{1-\lambda x^2}{1-x^2}}\,dx = \lambda x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\lambda x^2}}$$

$$+ 2(1-\lambda)\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{C_1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + \frac{C_2}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 - \cdots\right\},$$

$$C_1 = 1-6\lambda,$$
$$C_2 = 1-18\lambda+30\lambda^2,$$
$$C_3 = 1-36\lambda+150\lambda^2-140\lambda^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left\{\frac{d^n[\lambda^n(1-\lambda)^n]}{d\lambda^n} + 2\lambda\frac{d^{n+1}[\lambda^n(1-\lambda)^n]}{d\lambda^{n+1}}\right\}$$
$$= 1 - 3(n)_1(n+1)_1\lambda + 5(n)_2(n+2)_2\lambda^2 - 7(n)_3(n+3)_3\lambda^3 + \cdots$$

9. Mittels der Exponentialreihe findet man

$$\int\frac{e^{ax}}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\,l(x^2) + \frac{a}{1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots$$

10. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\int\frac{e^{az}}{b+z}\,dz = P_0 + \frac{a}{1}P_1 + \frac{a^2}{1.2}P_2 + \frac{a^3}{1.2.3}P_3 + \cdots$$

$$P_0 = l(b+z),\quad P_n = \frac{z^n}{n} - bP_{n-1},$$

welche Entwicklung bei kleinen a vorteilhaft ist.

Unter der Bedingung $z^2 < b^2$ hat man ferner

$$\int\frac{e^{az}}{b+z}\,dz = \frac{Q_0}{b} - \frac{Q_1}{b^2} + \frac{Q_2}{b^3} - \frac{Q_3}{b^4} + \cdots,$$

$$Q_0 = \frac{e^{az}}{a},\quad Q_n = \frac{z^n e^{az} - n\,Q_{n-1}}{n}.$$

Mittels der Substitution $b + z = x$ gelangt man zu der dritten Entwicklung

$$\int\frac{e^{az}}{b+z}\,dz = e^{-ab}\left\{l(b+z) + \frac{a}{1}\cdot\frac{b+z}{1} + \frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{(b+z)^2}{2} + \cdots\right\}.$$

11. Durch Benutzung der logarithmischen Reihe ergiebt sich

$$\int l\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots,\quad 0 \leqq x < 1,$$

welche Reihe für $x \leqq \frac{1}{2}$ rasch konvergiert, dagegen für nahe an der Einheit liegende x unvorteilhaft ist.

Setzt man $x = 1 - y$ und wendet partielle Integration an, so folgt

$$\int l\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = -\,ly\,.\,l(1-y) + \int\frac{l(1-y)}{y}\,dy$$

und hieraus durch Entwicklung des zweiten Integrals

$$\int l\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = l\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot lx - \left\{\frac{1-x}{1^2} + \frac{(1-x)^2}{2^2} + \cdots\right\};$$

diese Reihe konvergiert sehr gut für $\frac{1}{2} < x < 1$.

12. Unter der Voraussetzung $0 \leqq x < 1$ ist

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \cdots, \quad 0 \leqq x < 1.$$

Man hat andererseits

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \int l\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{x} - \int l\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\frac{dx}{x};$$

setzt man im zweiten Integral rechter Hand $x^2 = \xi$, so werden die vorigen Entwicklungen anwendbar und liefern

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx$$

$$= l(1+x)\,.\,lx - \left\{\frac{1-x}{1^2} + \frac{(1-x)^2}{2^2} + \frac{(1-x)^3}{3^2} + \cdots\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1-x^2}{1^2} + \frac{(1-x^2)^2}{2^2} + \frac{(1-x^2)^3}{3^2} + \cdots\right\}$$

$$0 \leqq x < 1.$$

Im Falle $x > 1$, setze man $x = \frac{1}{u}$ und benutze die vorhergehenden Entwicklungen; dies giebt

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = [l(1+x) - \tfrac{1}{2}lx]\,lx$$

$$+ \frac{1}{1^2}\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots$$

$$- \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^3 + \cdots\right\},$$

und noch

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{1^2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \cdots$$

Je nachdem x in einem der vier Intervalle

$$0 \ldots \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} \ldots 1, \quad 1 \ldots 2, \quad 2 \ldots \infty$$

enthalten ist, sind die vier gefundenen Reihen bequem anzuwenden.

13. Um das Integral

$$\int \frac{z^{a-1}}{b + lz}\,dz$$

in eine Reihe zu entwickeln, benutze man zuerst die Substitution $b + lz = x$ und nachher die Exponentialreihe; man findet

$$\int \frac{z^{a-1}}{b + lz} dz$$

$$= e^{-ab}\left\{l(b + lz) + \frac{a}{1} \cdot \frac{b + lz}{1} + \frac{a^2}{1.2} \cdot \frac{(b + lz)^2}{2} + \cdots\right\}.$$

14. Mittels der Substitution $\sin\varphi = x^2$ und durch Benutzung der in Nr. 1 gegebenen Entwicklungen erhält man

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}$$

$$= \sqrt{\sin\varphi}\left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{5} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\sin^4\varphi}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\sin^6\varphi}{13} + \cdots\right\}.$$

15. Setzt man

$$\sin\varphi = x, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \lambda,$$

so findet man u. a.

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{2}{a}\{\tan\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}A_1\tan^3\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{5}A_2\tan^5\tfrac{1}{2}\varphi - \cdots\},$$

wobei die Koeffizienten A_1, A_2 u. s. w. ebenso wie in Nr. 6 berechnet werden.

16. Dasselbe Verfahren liefert

$$\int \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \,.\, d\varphi = \frac{(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

$$+ \frac{2b^2}{a}\{\tan\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}C_1\tan^3\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{5}C_2\tan^5\tfrac{1}{2}\varphi - \cdots\},$$

worin die Koeffizienten C_1, C_2 u. s. w. die nämlichen sind wie in Nr. 8.

17. Durch Anwendung der Substitution

$$\tan\psi = \frac{a}{b}x$$

ergiebt sich u. a.

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{a^4\cos^4\psi + b^4\sin^4\psi}}$$

$$= \frac{1}{2ab}\left\{R_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2}{2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{R_4}{2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{R_6}{2^3} + \cdots\right\},$$

wobei die Grössen R_0, R_2, R_4 u. s. w. nach folgenden Formeln zu berechnen sind:

$$R_0 = 2\,arctan\left(\frac{b}{a}\,tan\,\psi\right),$$

$$R_n = \frac{1}{n}\left\{(n-1)R_{n-2} - \frac{\beta + \alpha\cos 2\psi}{\alpha + \beta\cos 2\psi}\left(\frac{ab\sin 2\psi}{\alpha+\beta\cos 2\psi}\right)^{n-1}\right\},$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

18. Unter der Voraussetzung, dass ω zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, findet man mittels der Substitution $tan\,\frac{1}{2}\omega = x$

$$\int\frac{\omega}{\sin\omega}\,d\omega = 2\left\{\frac{1}{1^2}\,tan\,\tfrac{1}{2}\omega - \frac{1}{3^2}\,tan^3\,\tfrac{1}{2}\omega + \frac{1}{5^2}\,tan^5\,\tfrac{1}{2}\omega - \cdots\right\}.$$

19. Für ein zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegendes ω hat man durch Anwendung der Substitution $\sin\omega = x$

$$\int\frac{\omega}{tan\,\omega}\,d\omega = \frac{\sin\omega}{1^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\omega}{3^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^5\omega}{5^2} + \cdots$$

20. Bezeichnet ε einen positiven oder negativen echten Bruch, so ist

$$\int l(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)\,d\varphi = -\tfrac{1}{1}P_2\varepsilon^2 - \tfrac{1}{2}P_4\varepsilon^4 - \tfrac{1}{3}P_6\varepsilon^6 - \cdots$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi), \quad P_m = \frac{1}{m}\{(m-1)P_{m-2} - \sin^{m-1}\varphi\cos\varphi\}.$$

Eine andere Entwicklung ergiebt sich, wenn man unter der Bedingung $\varphi^2 < \pi^2$

$$tan\,\tfrac{1}{2}\varphi = x, \quad \varepsilon = \sin\vartheta$$

setzt und nachher die auf S. 329 des I. Teiles angegebene logarithmische Reihe benutzt; es wird

$$\int l(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= -8\{\tfrac{1}{1}Q_1\sin^2\vartheta - \tfrac{1}{2}Q_2\sin^2 2\vartheta + \tfrac{1}{3}Q_3\sin^2 3\vartheta - \cdots\},$$

$$Q_1 = tan\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi, \quad Q_n = \frac{tan^{2n-1}\,\frac{1}{2}\varphi}{2n-1} - Q_{n-1}.$$

21. Um das Integral

$$\int\frac{e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}}{2}\,\sin^\mu\omega\,d\omega$$

zu entwickeln, setze man erst $\sin\omega = x$ und benutze nachher die auf S. 297 des I. Teiles (Aufgabe 16) angegebene Reihe, welche erforderlichen Falls zu differenzieren ist; unter der Bedingung $-\frac{1}{2}\pi < \omega < +\frac{1}{2}\pi$ ergiebt sich

$$\int \frac{e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}}{2} \sin^\mu \omega \, d\omega = \frac{\sin^{\mu+1}\omega}{\mu+1} + \frac{\lambda^2+1^2}{1.2} \cdot \frac{\sin^{\mu+3}\omega}{\mu+3} + \frac{(\lambda^2+1^2)(\lambda^2+3^2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{\sin^{\mu+5}\omega}{\mu+5} + \cdots$$

22. Dasselbe Verfahren liefert die Entwicklung

$$\int \frac{e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}}{2} \sin^\mu \omega \, d\omega = \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\sin^{\mu+2}\omega}{\mu+2} + \frac{\lambda(\lambda^2+2^2)}{1.2.3} \cdot \frac{\sin^{\mu+4}\omega}{\mu+4} + \frac{\lambda(\lambda^2+2^2)(\lambda^2+4^2)}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\sin^{\mu+6}\omega}{\mu+6} + \cdots$$

23. Mittels der Substitution

$$\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2} = x$$

und durch Anwendung der Reihen auf S. 298 des I. Teiles (Aufgabe 17) erhält man, vorausgesetzt, dass ω zwischen $\sqrt{2}-1$ und $\sqrt{2}+1$ liegt,

$$\int \left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^\lambda \cos \mu\omega \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^{\lambda+1} - \frac{\mu^2+1^2}{1.2(\lambda+3)}\left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^{\lambda+3} + \frac{(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)}{1.2.3.4(\lambda+5)}\left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^{\lambda+5} - \cdots$$

24. Dasselbe Verfahren liefert unter gleicher Bedingung:

$$\int \left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^\lambda \sin \mu\omega \, d\omega$$

$$= \frac{\mu}{1(\lambda+2)}\left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^{\lambda+2} - \frac{\mu(\mu^2+2^2)}{1.2.3(\lambda+4)}\left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^{\lambda+4} + \frac{\mu(\mu^2+2^2)(\mu^2+4^2)}{1.2.3.4.5(\lambda+6)}\left(\frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}\right)^{\lambda+6} - \cdots$$

§ 10.

Begriff des bestimmten Integrals.

I. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

bedeutet den Grenzwert, gegen den die Summe

$$[f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \cdots + f(a + \overline{n-1}\,\delta)]\,\delta,$$

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

konvergiert, wenn n unendlich gross wird.

Z. B. $\int_a^b x^2 dx = Lim\{\delta[a^2 + (a+\delta)^2 + (a+2\delta)^2 + \cdots + (a+\overline{n-1}\,\delta)^2]\}$,

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

oder

$$\int_a^b x^2\,dx$$

$$= Lim\left\{a^2(b-a) + 2\cdot\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\,a\,(b-a)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}\,(b-a)^3\right\}$$

für $n = \infty$ erhält man diesen Grenzwert (vergl. T. I S. 7, Aufg. 15, 16)

$$a^2(b-a) + a\,(b-a)^2 + \tfrac{1}{3}(b-a)^3,$$

also

$$\int_a^b x^2\,dx = \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Ebenso ist

$$\int_a^b e^x\,dx = Lim\{\delta[e^a + e^{a+\delta} + e^{a+2\delta} + \cdots + e^{a+\overline{n-1}\delta}]\}$$

$$= Lim\left\{e^a(e^{n\delta}-1)\frac{\delta}{e^\delta - 1}\right\} = e^b - e^a.$$

II. Hat man den Wert des unbestimmten Integrals

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

ermittelt, so ist unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ und $F(x)$ in dem Intervalle von a bis b endlich und stetig sind:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

III. Daraus folgt, dass

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

ist.

IV. Wenn $f(x)$ ein Aggregat von einer endlichen Anzahl anderer Funktionen, etwa

$$f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x) + C\chi(x) + \cdots$$

ist, so gilt dieselbe Vorschrift wie bei unbestimmten Integralen:

$$\int_a^b \{A\varphi(x) + B\psi(x) + C\chi(x) + \cdots\}\,dx$$

$$= A\int_a^b \varphi(x)\,dx + B\int_a^b \psi(x)\,dx + C\int_a^b \chi(x)\,dx + \cdots$$

Beispiele. 1) $\int_a^b x^{p-1}\,dx = \frac{b^p - a^p}{p}, \quad p > 0.$

2) $\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha + \beta x)^{q+1}} = \frac{1}{q\alpha^q\beta}, \quad q > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$

3) $\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha + \beta x)(\alpha_1 + \beta_1 x)} = \frac{l\alpha - l\alpha_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0.$

4) $\int_0^\alpha \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{4\alpha}, \quad \alpha > 0.$

5) $\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}},$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{4\pi c}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}},$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(a + bx + cx^2)^2} = -\frac{2\pi b}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}},$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{4\pi a}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}},$

(6–9:) $4ac - b^2 > 0.$

$$\left.\begin{aligned}
&10)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3}=\frac{12\pi c^2}{\sqrt{(4ac-b^2)^5}},\\
&11)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^3}=-\frac{6\pi bc}{\sqrt{(4ac-b^2)^5}},\\
&12)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(a+bx+cx^2)^3}=\frac{2\pi(2ac+b^2)}{\sqrt{(4ac-b^2)^5}},\\
&13)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3dx}{(a+bx+cx^2)^3}=-\frac{6\pi ab}{\sqrt{(4ac-b^2)^5}},\\
&14)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4dx}{(a+bx+cx^2)^3}=\frac{12\pi a^2}{\sqrt{(4ac-b^2)^5}},
\end{aligned}\right\}\ 4ac-b^2>0.$$

Wenn a, c und $4ac-b^2$ positiv sind und zur Abkürzung

$$2\sqrt{ac}+b=h$$

gesetzt wird, so ist

15) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{a+bx^2+cx^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{ah}}.$$

16) $$\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{ch}}.$$

17) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(a+bx^2+cx^4)^2}=\frac{\pi(3h-b)}{8\sqrt{a^3h^3}}.$$

18) $$\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^2}=\frac{\pi}{4\sqrt{ah^3}}.$$

19) $$\int_0^{\infty}\frac{x^4\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^2}=\frac{\pi}{4\sqrt{ch^3}}.$$

20) $$\int_0^{\infty}\frac{x^6\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^2}=\frac{\pi(3h-b)}{8\sqrt{c^3h^3}}.$$

21) $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^3} = \frac{\pi(5h-3b)}{32\sqrt{a^3h^5}}.$$

22) $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^3} = \frac{3\pi}{16\sqrt{ah^5}}.$$

23) $$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^3} = \frac{3\pi}{16\sqrt{ch^5}}.$$

24) $$\int_0^\infty \frac{x^8\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^3} = \frac{\pi(5h-3b)}{32\sqrt{c^3h^5}}.$$

25) $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^4} = \frac{\pi(7h-5b)}{64\sqrt{a^3h^7}}.$$

26) $$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^4} = \frac{5\pi}{32\sqrt{ah^7}}.$$

27) $$\int_0^\infty \frac{x^8\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^4} = \frac{5\pi}{32\sqrt{ch^7}}.$$

28) $$\int_0^\infty \frac{x^{10}\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^4} = \frac{\pi(7h-5b)}{64\sqrt{c^3h^7}}.$$

29) $$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)},\quad \mu>0.$$

30) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

31) $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

32) $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2},\quad m \text{ gerade}.$$

33) $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}, \quad m \text{ ungerade.}$$

Wenn a, c und $4ac - b^2$ positiv sind und $2\sqrt{ac} + b$ wieder mit h bezeichnet wird, so ist

34) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}} = \frac{2}{h\sqrt{a}}.$$

35) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}} = \frac{2}{h\sqrt{c}}.$$

36) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{2(2h-b)}{3h^2\sqrt{a^3}}.$$

37) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{4}{3h^2\sqrt{a}}.$$

38) $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{4}{3h^2\sqrt{c}}.$$

39) $$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{2(2h-b)}{3h^2\sqrt{c^3}}.$$

40) $$\int_0^1 x^{a-1}\,lx\,dx = -\frac{1}{a^2}, \qquad a > 0.$$

41) $$\int_0^1 x^{a-1}(lx)^n\,dx = \frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}, \qquad a > 0.$$

42) $$\int_0^\infty e^{-az}\,dz = \frac{1}{a}.$$ 43) $$\int_0^\infty z e^{-az}\,dz = \frac{1}{a^2}, \qquad a > 0.$$

44) $$\int_0^\infty z^n e^{-az}\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}, \qquad a > 0.$$

45) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m \omega \, d\omega = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad m \text{ gerade.}$$

46) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m \omega \, d\omega = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}, \quad m \text{ ungerade.}$$

47) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

48) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3 \beta^3}.$$

49) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3\beta}.$$

50) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta^3}.$$

51) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2}{\alpha^5\beta^5}.$$

52) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{\alpha^2 + 3\beta^2}{\alpha^5\beta^3}.$$

53) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3\beta^5}.$$

54) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \omega \sin^2 \omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^3} = \frac{\pi}{16\alpha^3\beta^3}.$$

55) $$\int_0^{\infty} e^{-au} \cos bu \, du = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&56)\quad \int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,du = \frac{b}{a^2+b^2},\\
&57)\quad \int_0^\infty ue^{-au}\cos bu\,du = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2},\\
&58)\quad \int_0^\infty ue^{-au}\sin bu\,du = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2},\\
&59)\quad \int_0^\infty u^2e^{-au}\cos bu\,du = \frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3},\\
&60)\quad \int_0^\infty u^2e^{-au}\sin bu\,du = \frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3},
\end{aligned}\right\}\quad a>0.$$

Kapitel II.

Quadraturen und Rektifikationen.

---

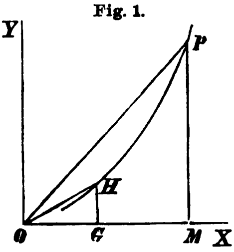
§ 11.

Die Quadratur ebener Kurven.

Allgemeine Regeln und Formeln. Wenn es sich darum handelt, unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems den Inhalt U derjenigen Fläche zu bestimmen, welche von der festen Ordinate GH, der beweglichen Ordinate MP, der Abscissenachse und der gegebenen Kurve begrenzt wird, so gilt für $OG = x_0$, $OM = x$ und $MP = y$ (Fig. 1) die Formel

1) $$U = \int_{x_0}^{x} y\,dx.$$

Fig. 1.



Bei schiefwinkligen Koordinaten ist, wenn der Koordinatenwinkel ω heisst,

2) $$U = \sin\omega \cdot \int_{x_0}^{x} y\,dx.$$

Wird die Kurve durch zwei Gleichungen charakterisiert, in denen x und y als Funktionen einer dritten unabhängigen Variabeln auftreten, so ist dx, mithin auch $y\,dx$ durch diese Variable auszudrücken und die Integrationsgrenzen sind für sie entsprechend zu bestimmen.

Die Fläche einer Kurve gilt als positiv oder negativ, je nachdem sie über oder unter der Abscissenachse liegt. Wenn die Kurve HP die Abscissenachse schneidet, so liefert die Formel 1) nicht die arithmetische, sondern die algebraische Summe der einzelnen, über und unter der Abscissenachse liegenden Flächenstücke. Um die arithmetische Summe derselben zu finden, muss man die einzelnen Stücke einzeln berechnen und dabei von den verschiedenen Vorzeichen abstrahieren.

Erleidet die Kurve HP eine Unterbrechung der Kontinuität, so besteht die Fläche aus getrennten Teilen, welche einzeln quadriert werden müssen.

Wenn jeder Abscisse $OM = x$ zwei Ordinaten $MP_1 = y_1$ und $MP_2 = y_2 > y_1$, also auch der Abscisse OG die beiden Ordinaten GH_1 und $GH_2 > GH_1$ entsprechen, so ist die Fläche des gemischtlinigen Vierecks $H_1H_2P_2P_1$

$$3)\qquad V = \int_{x_0}^{x} y_2\, dx - \int_{x_0}^{x} y_1\, dx = \int_{x_0}^{x} (y_2 - y_1)\, dx.$$

Im Fall nicht immer $y_2 > y_1$ bleibt, schneiden sich die Kurven H_1P_1 und H_2P_2 in einem oder mehreren Punkten; die Fläche besteht dann aus zwei oder mehr Stücken, welche einzeln quadriert werden müssen.

Die Fläche des Sectors HOP, welche S heissen möge, ergiebt sich mittels der Formel

$$4)\qquad S = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \left(x\frac{dy}{dx} - y\right) dx,$$

wobei hinsichtlich der Werte von x, y, dx, dy dieselben Bemerkungen gelten wie für die Formel 1).

Für $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d. h. bei Gebrauch von Polarkoordinaten wird aus der Formel 4)

$$5)\qquad S = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\, d\theta;$$

dabei hat man entweder r durch θ, oder θ mithin auch $d\theta$ durch r, oder r und θ durch eine dritte unabhängige Variable auszudrücken.

Erleidet die Kurve HP eine Unterbrechung der Kontinuität, so besteht der Sektor HOP aus mehreren Teilen, welche einzeln berechnet werden müssen.

Wenn jedem Polarwinkel θ zwei Radienvektoren $OP_1 = r_1$ und $OP_2 = r_2 > r_1$ entsprechen, so schliessen die Anfangs- und Endvektoren mit den beiden Kurven ein Ringstück ein, dessen Fläche ist

$$6)\qquad R = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r_2^2\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r_1^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} (r_2^2 - r_1^2)\, d\theta.$$

Falls sich die beiden Kurven in einem oder mehreren Punkten schneiden, zerfällt R in zwei oder mehrere Teile, welche einzeln zu berechnen sind.

Beispiele. 1. Parabolische Kurven. Wenn die Gleichung der Kurve ist

$$k^{m-1} y = x^m,$$

so unterscheide man die drei Fälle $m > -1$, $m = -1$, $m < -1$. Im ersten Falle beträgt die über der Abscisse x stehende Fläche den $(m+1)^{\text{ten}}$ Teil des Rechtecks aus Abscisse und Ordinate. Für $m = -1$ kommt man auf die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel (vgl. Nr. 6). Im Falle $m < -1$ kann man die Fläche nicht von $x = 0$ ab rechnen, weil sie sonst unendlich gross werden würde; nimmt man dagegen die der positiven Abscisse a entsprechende Ordinate als feste Ordinate, so ist

$$U = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)k^{m-1}}.$$

Die von $x = a$ bis $x = \infty$ reichende Fläche besitzt hier einen endlichen Wert.

2. Die Fläche zwischen der Parabel $y^2 = 2px$ und ihrer Evolute

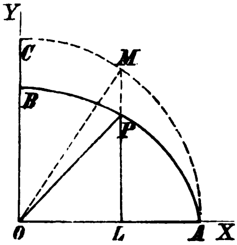
$$y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(x-p)^3}{p}$$

ist $\frac{88\sqrt{2}}{15} \cdot p^2$

3. Die Ellipse. (Fig. 2.) Die über der Abscisse $OL = x$ stehende Fläche ist

$$U = \tfrac{1}{2}\left(xy + ab \arcsin \frac{x}{a}\right).$$

Fig. 2.



Für den Sektor $AOP = S$ ergiebt sich durch Einführung des Winkels $AOM = \omega$

$$S = \tfrac{1}{2} ab\omega,$$

was einen leicht erkennbaren geometrischen Sinn hat.

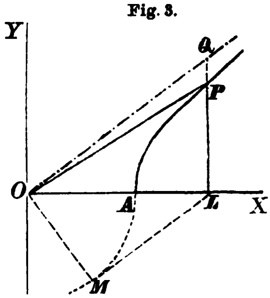
4. Die den Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

gemeinsame Fläche ist $4ab \arctan \frac{b}{a}$.

5. Die Hyperbel. Wird $OL = x$, $LP = y$ und die Fläche $ALP = U$ gesetzt, so ist (Fig. 3)

Fig. 3.



$$U = \frac{1}{2}\left\{xy - ab\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right\}.$$

Für den Sektor $AOP = S$ ergiebt sich durch Einführung des Winkels $AOM = \omega$

$$S = \tfrac{1}{2}ab\,l\,tan\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\omega).$$

6. Hyperbel, deren Gleichung auf die Asymptoten bezogen

$$xy = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

ist. Da $sin\,\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, so ist die zwischen den Abscissen x_0 und x liegende Fläche

$$U = sin\,\omega \int_{x_0}^{x} y\,dx = \tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist für $a = b = \sqrt{2}$, $x_0 = 1$, $U = lx$.

7. Die gemeinsame Fläche der Ellipse $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ und der konfokalen Hyperbel $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1$, wobei

$$a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = c^2,$$

ist:

$$2a_1b_1\,arccos\,\frac{a_2}{c} - 2a_2b_2\,l\left(\frac{a_1 + b_1}{c}\right) = 2a_1b_1\,arctan\,\frac{b_2}{a_2} - 2a_2b_2\,l\left(\sqrt{\frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1}}\right).$$

8. Bestimmung der Ellipsenfläche aus der allgemeinen Ellipsengleichung. Wenn $C^2 - AB < 0$ ist, lautet die allgemeine Ellipsengleichung:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

löst man dieselbe nach y auf und benutzt die Abkürzungen

$$E^2 - BF = L, \quad CE - BD = M, \quad AB - C^2 = N,$$

so erhält man zwei Werte von y, deren Differenz beträgt

$$y_2 - y_1 = \frac{2}{B}\sqrt{L + 2Mx - Nx^2}.$$

Diese verschwindet, wenn x einen der beiden Werte

$$x_1 = \frac{M - \sqrt{M^2 + LN}}{N}, \quad x_2 = \frac{M + \sqrt{M^2 + LN}}{N}$$

bekommt; die zugehörigen Ordinaten berühren dann die Kurve. Die Fläche eines mondförmigen, mit $x = x_1$ anfangenden Ellipsenabschnitts ergiebt sich aus der Gleichung

$$U = \frac{2}{B} \int_{x_1}^{x} \sqrt{L + 2Mx - Nx^2} \cdot dx.$$

Setzt man nachher $x = x_2$, so erhält man als gesamte Ellipsenfläche

$$\Omega = \frac{\pi (M^2 + LN)}{B\sqrt{N^3}}$$

oder zufolge der Werte von L, M, N

$$\Omega = \pi \frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE - (AB - C^2)F}{\sqrt{(AB - C^2)^3}}$$

9. **Parabolische Segmente.** Es bezeichne p den Abstand einer Geraden vom Koordinatenanfange, α den Kosinus, β den Sinus des Winkels zwischen p und der x-Achse; die Gerade, welche unter diesen Voraussetzungen durch die Gleichung

$$\alpha x + \beta y = p$$

dargestellt wird, schneide die Parabel

$$x^2 = 2cy$$

in den Punkten P und Q; es ist dann die Sehne

$$PQ = \frac{2\sqrt{c^2\alpha^2 + 2c\beta p}}{\beta^2}.$$

Erteilt man dem p den speziellen Wert

$$-\frac{c\alpha^2}{2\beta},$$

der mit h bezeichnet werden möge, so zieht sich die Sehne PQ auf einen Punkt R zusammen, in welchem die Parabeltangente parallel zu PQ liegt. Die Fläche S des mondförmigen Segments PQR ist nun, wenn p als Abscisse und PQ als zugehörige Ordinatendifferenz betrachtet wird,

$$S = \int_h^p PQ \cdot dp = \tfrac{2}{3}\sqrt{8c\left(\frac{p - h}{\beta}\right)^3}.$$

Das erhaltene Resultat gewinnt eine sehr einfache Gestalt, wenn der Punkt T eingeführt wird, in welchem sich die durch P und Q gehenden Parabeltangenten schneiden, welcher also den Pol für die Polare PQ darstellt. Sind u und v die auf das ursprüngliche System der x und y bezogenen Koordinaten von T, so ist die Gleichung der Polare

$$ux - cy = cv;$$

diese muss identisch mit der Gleichung $\alpha x + \beta y = p$ sein, und daraus folgen die Relationen

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{u}{cv}, \quad \frac{\beta}{p} = -\frac{1}{v}, \quad h = \frac{pu^2}{2cv}, \quad \beta = -\frac{p}{v}, \quad \frac{p-h}{\beta} = \frac{u^2 - 2cv}{2c}.$$

Hiernach ist

$$S = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{(u^2 - 2cv)^3}}{c}$$

oder, wenn v_1 die Ordinate des Punktes R bezeichnet,

$$S = \tfrac{2}{3}\sqrt{8c(v_1 - v)^3}.$$

Daran knüpft sich der Satz: Beschreibt der Pol T eine Parabel, welche der ursprünglichen Parabel kongruent ist und deren Scheitel um k tiefer liegt als der Scheitel der ersten, so bleibt die Fläche des Segments PQR konstant $= \frac{2}{3}\sqrt{8ck^3}$.

10. Elliptische Segmente. Unter Beibehaltung der Bedeutungen von α, β, p und h findet man zunächst, dass die Gerade $\alpha x + \beta y = p$ und die Ellipse

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

zwei Punkte P und Q gemein haben, deren Entfernung

$$PQ = \frac{2\sqrt{h^2 - p^2}}{h^2\sqrt{AB}}, \quad h^2 = \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B}$$

ist, und wobei h denjenigen Spezialwert von p bezeichnet, für welchen P und Q in einen Punkt R zusammenfallen. Die Fläche S des Segments PQR ist hiernach

$$S = -\int_h^p PQ \cdot dp = \frac{1}{\sqrt{AB}}\left\{\arccos\frac{p}{h} - \frac{p}{h}\sqrt{1 - \left(\frac{p}{h}\right)^2}\right\}.$$

Bezeichnen u, v die ursprünglichen Koordinaten des Pols T, welcher der Polare PQ entspricht, so muss die Gleichung $\alpha x + \beta y = p$ identisch mit der Polarengleichung

$$Aux + Bvy = 1$$

sein, und daraus folgt

$$\frac{p}{h} = \frac{1}{\sqrt{Au^2 + Bv^2}}.$$

Es sei ferner $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ der Radiusvektor des Poles T und r_1 der Radiusvektor von R; dann ist

$$r_1 = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{Au^2 + Bv^2}} \text{ mithin } \frac{p}{h} = \frac{r_1}{r}$$

und schliesslich, wenn a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten,

$$S = ab\left\{arccos \frac{r_1}{r} - \frac{r_1}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}\right\}.$$

Hieran knüpft sich der Satz: wenn der Pol T auf einer Ellipse fortrückt, die aus den Halbachsen μa, μb konstruiert, mithin der ursprünglichen Ellipse ähnlich und konzentrisch ist, so behält S den konstanten Wert

$$ab\left\{arccos\, \mu - \mu\sqrt{1 - \mu^2}\right\}.$$

11. Hyperbolische Segmente. Lässt man in der vorigen Untersuchung $-B$ an die Stelle von B treten, so erhält man

$$PQ = \frac{2\sqrt{p^2 - h^2}}{h^2\sqrt{AB}}, \quad h^2 = \frac{\alpha^2}{A} - \frac{\beta^2}{B}$$

und schliesslich, wenn die Radienvektoren von T und R mit r und r_1 bezeichnet werden,

$$S = ab\left\{\frac{r_1}{r}\sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - 1} - l\left[\frac{r_1}{r} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - 1}\right]\right\}.$$

Hieran knüpft sich ein ähnlicher Satz wie vorhin, wobei nur zu beachten ist, dass P und Q auf demselben Hyperbelzweige, mithin der Pol T zwischen der gegebenen Hyperbel und deren Asymptote liegen muss.

12. Die Gleichung der gegebenen Kurve sei (vergl. Tl. I, S. 94 Nr. 7)

$$9ay^2 = (x - 3a)^2 x.$$

Bei der Quadratur desjenigen Zweiges (Fig. 4), der nach unten konvex gekrümmt ist und an der Stelle $x = 3a$ vom Negativen zum Positiven übergeht, sind die Fälle $x \leqq 3a$ und $x \geqq 3a$ zu unterscheiden. Für $x < 3a$ ist die von $x = 0$ bis zum Ende des x gerechnete Fläche negativ und zwar

Fig. 4.

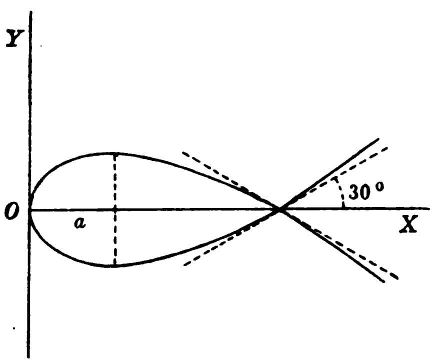
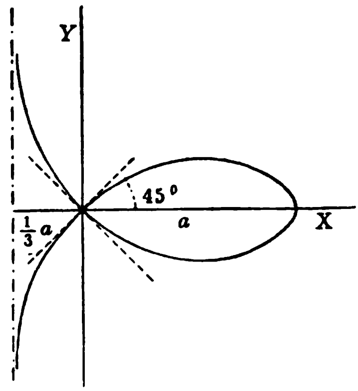


Fig. 5.



$$U = \frac{2x(x-5a)}{15}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

woraus sich z. B. als absolute Fläche des von der ganzen Kurve gebildeten Blattes der Wert

$$\frac{8\sqrt{3}}{5}a^2$$

ergiebt. Im Falle $x > 3a$ hat die von $x = 3a$ bis zum Endpunkte des x gerechnete Fläche den Inhalt

$$U = \frac{4\sqrt{3}}{5}a^2 + \frac{2x(x-5a)}{15}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

welcher Wert zu verdoppeln ist, wenn man die untere Fläche des zweiten Kurvenzweiges im absoluten Sinne hinzunimmt.

Für $x = 5a$ entsteht ein Abschnitt von gleicher Grösse wie das vorher erwähnte Blatt.

13. Das Cartesianische Blatt. Die Kurve (Fig. 5) hat die Gleichung

$$y^2 = x^2\frac{a-x}{a+3x}.$$

Die vom Koordinatenanfang gerechnete Fläche ist

$$U = \frac{1}{6}\left[a^2 - \sqrt{(a-x)^3(a+3x)}\right].$$

Der Inhalt des Blattes ist also $\frac{1}{3}a^2$; ebenso gross ist die Fläche zwischen der Kurve und ihrer Asymptote.

14. Die schleifenähnliche Kurve vierten Grades (vergl. Tl. I, S. 95, Nr. 9)

$$a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$$

lässt sich wie die beiden vorigen Kurven algebraisch quadrieren; über der Abscisse x ist die Fläche

$$U = \frac{1}{3}a^2\left(1 - \frac{y^3}{x^3}\right).$$

Die Gesamtfläche der Kurve beträgt $\frac{4}{3}a^2$.

15. Bei der Kurve

$$x^2y^2 = b^2(x^2 - a^2)$$

ist die über der Strecke $x - a$ stehende Fläche

$$U = xy - ab \,.\, arctan\,\frac{xy}{ab}$$

oder wenn

$$x = a\,sec\,\omega, \quad \text{mithin} \quad y = b\,sin\,\omega$$

gesetzt wird,

$$U = ab\,(tan\,\omega - \omega).$$

16. Die schleifenförmige Kurve

$$y^2 = x^2\frac{a-x}{a+x},$$

hat über der Abscisse x die Fläche

$$U = a^2 - \frac{1}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2}a^2\,arcsin\,\frac{x}{a};$$

der Inhalt der Schleife ist $2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2$; die Fläche zwischen der Kurve und ihrer Asymptote $2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2$.

17. In der Kurve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

ist die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \frac{1}{8}ab\left\{\frac{x(5a^2 - 2x^2)}{a^4}\sqrt{a^2 - x^2} + 3\,arcsin\,\frac{x}{a}\right\}.$$

Die Gesamtfläche der Kurve beträgt $\frac{3}{4}\pi ab$.

18. Verlegt man in der auf S. 95 des I. Teils unter Nr. 9 betrachteten Kurve den Koordinatenanfang nach der Spitze A, so erhält man als Gleichung der Kurve (Fig. 6)

$$a^2 y^2 = x^2 (2ax - x^2)$$

und für die über der Abscisse $AL = x$ stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} \arccos \frac{a - x}{a} - \frac{(a+x)(3a-2x)}{6a} \sqrt{2ax - x^2}.$$

Für die Fläche, deren Basis die Abscisse des oberen Kulminationspunktes $x = \frac{3}{2} a$ ist, folgt hieraus der Wert $\frac{1}{3} \pi a^2$; der ge-

Fig. 6.

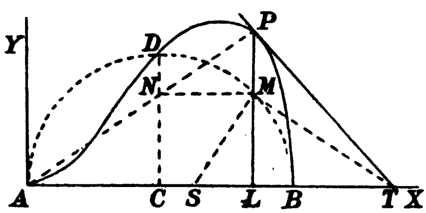
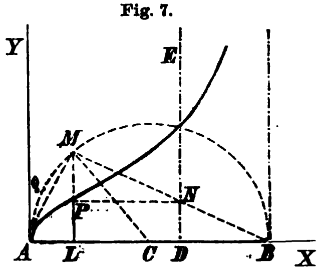


Fig. 7.



samte Flächeninhalt der Kurve ist gleich der Fläche des erzeugenden Kreises.

19. Die Cissoide. Die Gleichung

$$(2a - x) y^2 = x^3$$

liefert für die über der Abscisse x stehende Fläche den Inhalt

$$U = \tfrac{3}{2} a^2 \arccos \frac{a - x}{a} - \tfrac{1}{2} (3a + x) \sqrt{2ax - x^2}.$$

Der gesamte, zwischen der Kurve und ihrer Asymptote liegende Flächenraum beträgt das Dreifache von der Fläche des erzeugenden Kreises.

20. Über $AB = 2a$ als Durchmesser (Fig. 7) ist ein Kreis beschrieben und senkrecht zu AB eine Gerade DE in der Entfernung $BD = b$ gezogen; irgend ein Punkt M der Kreisperipherie wird einerseits auf AB projiziert, andererseits mit B durch die Gerade MB verbunden, welche DE in N schneidet, endlich sei $LP = DN$. Alle so konstruierten Punkte P liegen in einer Kurve, welche für $AL = x$, $LP = y$ durch die Gleichung

$$y = b \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

oder wenn $\angle ACM = \omega$ gesetzt wird, durch die beiden Gleichungen

$$x = a(1 - \cos\omega), \quad y = b \tan \tfrac{1}{2}\omega$$

ausgedrückt werden kann. (Die in Tl. I, S. 97 unter Nr. 11 betrachtete Kurve stellt hiervon den speziellen Fall $b = 2a$ dar.) Die über der Abscisse x stehende Fläche ist

$$U = ab(\omega - \sin\omega)$$

und steht in konstantem Verhältnisse zu dem Kreisabschnitte $AQMA$.

Fig. 8.

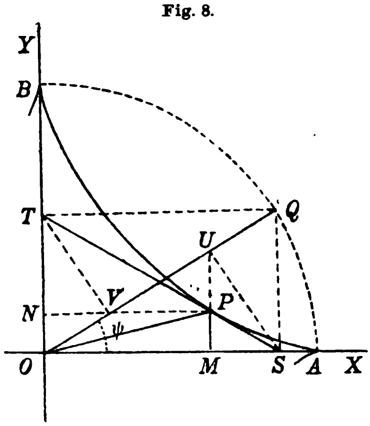
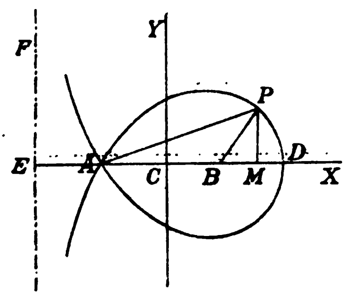


Fig. 9.



Die gesamte, zwischen der Kurve und ihrer Asymptote enthaltene Fläche beträgt $2\pi ab$.

21. Es sei die in Tl. I, S. 98 unter Nr. 12 betrachtete Kurve (Astroide) (Fig. 8) zu quadrieren, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Benutzt man in dem Integrale für U die Substitution $x = \xi^3$, so findet man als Fläche über der Abscisse x

$$U = \tfrac{1}{16}\left\{3a^2 \arcsin \sqrt[3]{\frac{x}{a}} - x^{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{2}{3}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}\right\}$$

und die Gesamtfläche $= \frac{3}{8}\pi a^2$.

Eleganter gestaltet sich die Quadratur, wenn man

$$x = a\cos^3\psi, \quad y = a\sin^3\psi$$

setzt, wobei $\psi = \angle AOQ$ ist. Die Fläche des Sektors, der von OA, dem Radiusvektor OP und der Kurve begrenzt wird, ist dann

$$S = \tfrac{3}{64}a^2(4\psi - \sin 4\psi).$$

Dasselbe Verfahren passt auch auf die Evolute der Ellipse.

22. Auf einer Geraden sind zwei feste Punkte A und B gegeben (Fig. 9) und mit einem veränderlichen Punkte P geradlinig

verbunden; für den Fall, dass zwischen den nach derselben Drehungsrichtung gerechneten Winkeln $DAP = \varphi$ und $DBP = \psi$ die Beziehung $\psi = 3\varphi$ stattfindet, ist der geometrische Ort des Punktes P eine Kurve dritten Grades, deren Gleichung lautet

$$y = \pm (\tfrac{1}{2} c + x)\sqrt{\frac{c - x}{c + x}};$$

hierbei ist $AB = c$ gesetzt, der Mittelpunkt C von AB zum Koordinatenanfange und CD zur Abscissenachse genommen. Die Kurve besitzt eine vertikale Asymptote in der Entfernung $CE = -c$ und schneidet die Abscissenachse in zwei Punkten A und D, deren Abscissen sind $CA = -\tfrac{1}{2}c$ und $CD = +c$. Für $CM = x$ ist der Inhalt der über der Basis $c - x = MD$ stehenden Fläche MDP

$$U = \tfrac{1}{2}\sqrt{(c - x)^3(c + x)}.$$

Die von der Kurve gebildete Schlinge umschliesst den Flächenraum

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}c^2;$$

ebenso gross ist auch die Fläche zwischen der Asymptote und den beiden von A aus nach der Asymptote zu laufenden unendlichen Zweigen der Kurve.

23. Die logarithmische Linie. In der Kurve

$$y = be^{\frac{x}{a}}$$

ist die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = ab\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right) = a(y - b).$$

Die von $x = 0$ bis $x = -\infty$ reichende Fläche hat die endliche Grösse ab.

24. Die Gewölblinie. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2} b\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ergiebt sich für die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} ab\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\sqrt{y^2 - b^2},$$

wonach U leicht zu konstruieren ist.

25. Die Traktorie der Geraden. Beachtet man, dass aus der Gleichung der Kurve, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2} a l \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right) - \sqrt{a^2 - y^2},$$

folgt

$$dx = - \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy,$$

so erhält man für die mit $x = 0$ und $y = a$ beginnende Fläche (Fig. 10)

$$U = \tfrac{1}{2} \left\{ a^2 \arccos \frac{y}{a} - y \sqrt{a^2 - y^2} \right\};$$

dieselbe ist demnach gleich der Fläche $ANQA$ in dem mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreise. Die Gesamtfläche der Kurve kommt der Fläche des erwähnten Kreises gleich.

Fig 10.

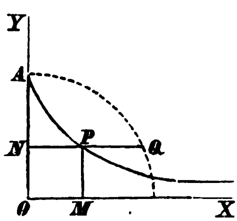
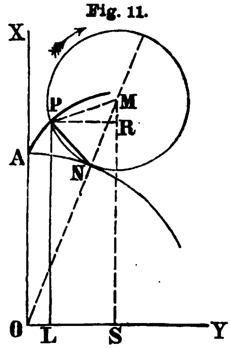


Fig. 11.



26. Die Cykloide. Bezeichnet ω den Wälzungswinkel, so ist (Tl. I, S. 116, Nr. 14)

$$x = b(\omega - \sin \omega), \quad y = b(1 - \cos \omega)$$

und hieraus folgt für die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} b^2 (3\omega - 4 \sin \omega + \sin \omega \cos \omega).$$

Der Flächeninhalt der ganzen Cykloide beträgt demnach das Dreifache vom Flächeninhalte des erzeugenden Kreises.

27. Die Epicykloide und die Hypocykloide. Vertauscht man in den auf S. 120 des I. Tls. angegebenen Gleichungen x und y gegeneinander, so dass nunmehr OA die Abscissenachse ist, so hat man als Gleichungen der Kurve (Fig. 11)

$$x = (a + b) \cos \frac{b\omega}{a} - b \cos \frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a + b) \sin \frac{b\omega}{a} - b \sin \frac{(a+b)\omega}{a},$$

und hieraus findet sich als Fläche des zwischen OA und OP enthaltenen Sektors

$$S = \frac{(a+b)(a+2b)b}{2a}(\omega - \sin \omega).$$

Dieselbe steht in konstantem Verhältnis zu dem zwischen der Sehne NP und dem Bogen NP liegenden Abschnitte des rollenden Kreises. Für $\omega = 2\pi$ wird der Sektor gleich einer gewissen Kreisfläche.

Nimmt man b und ω gleichzeitig negativ, so erhält man die entsprechende Formel für die Hypocykloide.

28. Spiralen, deren Gleichungen unter der Form

$$r = a\theta^m, \quad m \gtrless -\tfrac{1}{2}$$

enthalten sind, liefern

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\theta^{2m+1} - \theta_0^{2m+1}}{2m+1}.$$

Im Falle $m > -\frac{1}{2}$ kann man den Sektor von $\theta_0 = 0$ an rechnen, für $m < -\frac{1}{2}$ nimmt man am zweckmässigsten die Fläche von $\theta_0 = 1$ an.

Hiernach ist für die Spirale des Archimedes:

$$r = a\theta, \quad S = \tfrac{1}{6} a^2\theta^3 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r^2}{a},$$

für die parabolische Spirale:

$$r^2 = a^2\theta, \quad S = \tfrac{1}{4} a^2\theta^2 = \left(\frac{r^2}{2a}\right)^2,$$

für die hyperbolische Spirale:

$$r = \frac{a}{\theta}, \quad S = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) = \frac{a(a-r)}{2}.$$

Die gesamte, von $\theta_0 = 1$ bis $\theta = \infty$ reichende Fläche ist hier von endlicher Grösse $= \frac{1}{2} a^2$.

Für den Ausnahmefall $m = -\frac{1}{2}$, welcher der reziproken parabolischen Spirale entspricht, ergiebt sich

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta}, \quad S = \tfrac{1}{2} a^2 l\theta = a^2 l\left(\frac{a}{r}\right),$$

wobei der Sektor von $\theta_0 = 1$ an gerechnet ist.

29. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung

$$r = a e^{\beta\theta}$$

ergiebt sich für den von $\theta_0 = 0$ an gerechneten Sektor

$$S = \frac{a^2(e^{2\beta\theta} - 1)}{4\beta} = \frac{r^2 - a^2}{4\beta}.$$

Die von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = -\infty$ reichende Fläche hat die Grösse $\frac{a^2}{4\beta}$.

30. Die Kardioide (Fig. 12). Die Polargleichung

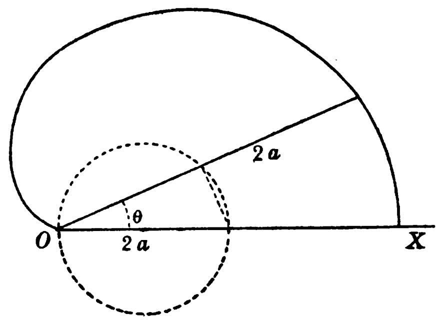
$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

führt zu der Formel

$$S = a^2(3\theta + 4\sin\theta + \sin\theta\cos\theta),$$

wobei der Sektor von $\theta_0 = 0$ an gerechnet ist. Die Gesamtfläche der Kurve beträgt das Sechsfache des erzeugenden Kreises.

Fig. 12.



31. Die Lemniskate. Aus der Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

folgt, wenn der Sektor von $\theta_0 = 0$ an gerechnet wird,

$$S = \tfrac{1}{4} a^2 \sin 2\theta,$$

was sich einfach konstruieren lässt. Die Gesamtfläche der Kurve ist gleich dem Quadrate über der Halbachse a.

32. Die Fusspunktkurve der Ellipse. Für den von $\theta_0 = 0$ an gerechneten Sektor der Kurve

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

findet man

$$S = \tfrac{1}{8}\{(a^2 + b^2)\,2\theta + (a^2 - b^2)\sin 2\theta\};$$

die Gesamtfläche der Kurve kommt der Fläche eines mit dem Radius $\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ beschriebenen Kreises gleich.

33. Projiziert man den Mittelpunkt einer aus den Halbachsen a und b konstruierten Ellipse auf alle Normalen der letzteren, so bilden die erhaltenen Fusspunkte eine Kurve, deren Gleichung ist

$$r = \frac{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}};$$

der von $\theta_0 = 0$ an gerechnete Sektor besitzt den Inhalt

$$S = \tfrac{1}{8}\{(a^2 + b^2)\, 2\theta + (a^2 - b^2) \sin 2\theta\} - \frac{ab}{2} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan\theta\right).$$

Bezeichnen S_1, S_2, S_3 die drei Sektoren der Ellipse, der Tangentenfusspunktkurve (Nr. 32) und der soeben besprochenen Kurve, so findet die Relation $S_3 = S_2 - S_1$ statt.

34. Der geometrische Ort des Endpunktes der Polarnormale der Ellipse wird durch folgende Gleichung bestimmt (Tl. I, S. 131, Aufg. 6):

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2 \cos^2\theta \sin^2\theta}{(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)^3};$$

für den von $\theta_0 = 0$ an gerechneten Sektor ergiebt sich hieraus

$$S = \frac{(a^2 - b^2)^2}{16}\left\{\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan\theta\right) - \frac{(a^2 \cos^2\theta - b^2 \sin^2\theta) \cos\theta \sin\theta}{(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)^2}\right\}.$$

Der Gesamtflächeninhalt der Kurve ist

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{ab}.$$

35. Die Kreisevolvente. Aus den Gleichungen

$$r = a\sqrt{1 + \omega^2}, \quad \theta = \omega - \arctan \omega$$

erhält man für die von $\omega = 0$ an gerechnete Sektorenfläche

$$S = \tfrac{1}{6} a^2 \omega^3;$$

dieselbe kann als der dritte Teil einer gewissen Dreiecksfläche betrachtet werden.

36. Die Traktorie des Kreises. Die Gleichungen

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad \theta = \omega - \arctan \omega$$

liefern für die mit $\omega = 0$ beginnende Sektorenfläche

$$S = \tfrac{1}{4} a^2 \left(\arctan \omega - \frac{\omega}{1 + \omega^2}\right) = \tfrac{1}{4}\left[(a^2 - r^2)\,\omega - a^2\theta\right],$$

was sich mittels zweier Kreissektoren konstruieren lässt.

37. Durch die beiden Gleichungen

$$x = a\left[(1 - \omega^2) \cos\omega + 2\omega \sin\omega - 1\right],$$
$$y = a\left[(1 - \omega^2) \sin\omega - 2\omega \cos\omega\right]$$

wird eine vom Koordinatenanfange ausgehende Spirale charakterisiert; dabei ist

$$x\,dy - y\,dx = a^2 \omega^2 (1 + \omega^2)\, d\omega,$$

mithin die Fläche des von $\omega = 0$ an gerechneten Sektors

$$S = \tfrac{1}{30} a^2 \omega^3 (5 + 3\omega^2)$$

oder auch

$$S = \frac{3\varrho + 2a}{30} \sqrt{\frac{(\varrho - a)^3}{a}},$$

wobei ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet.

38. In eine gegebene Parabel ist eine Gerade von konstanter Länge als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer unendlich vielen möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Parabel gelegt; man sucht die vom Durchschnittspunkte der Tangenten beschriebene Kurve und deren Fläche.

Ist in Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem

$$y = \frac{x^2}{2h}$$

die Gleichung der Parabel, mithin

$$\eta - y = \frac{x}{h}(\xi - x)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte xy, bezeichnen ferner x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten der Endpunkte der konstanten Sehne $2c$, ξ und η die Koordinaten des Tangentendurchschnittes, so müssen folgende fünf Bedingungen erfüllt sein:

α) $\quad h(\eta - y_0) = x_0(\xi - x_0), \quad h(\eta - y_1) = x_1(\xi - x_1),$

β) $\quad 2hy_0 = x_0^2, \quad 2hy_1 = x_1^2,$

γ) $\quad (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 4c^2.$

Aus den Gleichungen β) erhält man mit Rücksicht auf α)

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \xi,$$

ferner, wenn hierzu die Gleichung γ) genommen wird,

$$\frac{x_0 - x_1}{2} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \xi^2}};$$

diese Gleichungen liefern x_0, x_1, und nachher geben die Gleichungen α)

$$\eta = \frac{\xi^2}{2h} - \frac{c^2 h}{2(h^2 + \xi^2)}$$

oder, wenn der Koordinatenanfang um $\frac{c^2}{2h}$ abwärts verschoben wird,

$$\eta = \frac{c^2}{2h} + \frac{\xi^2}{2h} - \frac{c^2 h}{2(h^2 + \xi^2)}.$$

Die Fläche zwischen dieser Kurve und der Parabel beträgt, von $\xi = 0$ an gerechnet,

$$U = \tfrac{1}{2} c^2 \arctan \frac{\xi}{h}.$$

Die gesamte, zwischen der Ortskurve und der Parabel enthaltene Fläche ist $= \frac{1}{2}\pi c^2$, also unabhängig vom Parameter der Parabel und gleich der Fläche des über $2c$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises.

39. In eine Ellipse ist eine Gerade von der konstanten Länge $2c$ als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Ellipse gelegt; man sucht die vom Durchschnittspunkte der Tangenten beschriebene Kurve und deren Fläche.

Bezeichnet man ebenso wie in der vorigen Aufgabe, schreibt als Gleichung der Ellipse $Ax^2 + By^2 = 1$ und setzt $\frac{1}{c^2} = C$, so sind folgende fünf Bedingungen zu erfüllen:

$$\alpha)\qquad Ax_0\xi + By_0\eta = 1,\quad Ax_1\xi + By_1\eta = 1,$$

$$\beta)\qquad Ax_0^2 + By_0^2 = 1,\quad Ax_1^2 + By_1^2 = 1,$$

$$\gamma)\qquad (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = \frac{4}{C}.$$

Die Differenz der Gleichungen α) giebt mit γ) zusammen

$$\delta)\quad x_0 - x_1 = \frac{2B\eta}{\sqrt{C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)}},\quad y_0 - y_1 = -\frac{2A\xi}{\sqrt{C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)}};$$

ferner erhält man aus der Differenz der Gleichungen β)

$$\frac{B(y_0 + y_1)}{A(x_0 + x_1)} = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1}$$

oder, wenn rechter Hand die Werte in δ) benutzt werden,

$$\eta(x_0 + x_1) - \xi(y_0 + y_1) = 0.$$

Nimmt man hierzu die Summe der Gleichungen α), nämlich

$$A\xi(x_0 + x_1) + B\eta(y_0 + y_1) = 2,$$

so hat man zwei Gleichungen mit den Unbekannten $x_0 + x_1$ und $y_0 + y_1$; für letztere findet man

$$\varepsilon)\qquad x_0 + x_1 = \frac{2\xi}{A\xi^2 + B\eta^2},\quad y_0 + y_1 = \frac{2\eta}{A\xi^2 + B\eta^2}.$$

Aus den Gleichungen δ) und ε) erhält man die Werte von x_0 und y_0, die man nur in die erste der Gleichungen α) zu substituieren braucht, um die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η zu erhalten, nämlich

$$C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)(A\xi^2 + B\eta^2 - 1) = AB(A\xi^2 + B\eta^2)^2.$$

Setzt man

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2},$$

und führt Polarkoordinaten ein mittels der gewöhnlichen Substitutionen $\xi = \varrho \cos\theta$, $\eta = \varrho \sin\theta$, so erhält man

$$\varrho^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}} + \frac{1}{\frac{b^2 - c^2}{c^2} \cdot \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cdot \frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

oder kurz

$$\varrho^2 = r^2 + r_1^2,$$

wobei r den zum Polarwinkel θ gehörenden Radiusvektor der gegebenen Ellipse, r_1 dagegen den zum nämlichen Polarwinkel gehörenden Vektor eines Hilfskegelschnittes bedeutet. Für $c < b$ ist dieser Hilfskegelschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a_1 = \frac{ac}{\sqrt{b^2 - c^2}}, \quad b_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2 - c^2}};$$

für $c = b$ wird derselbe zu zwei Geraden, die in den Entfernungen $\pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ parallel zur Abscissenachse liegen und die Asymptoten der Ortskurve bilden; für $c > b$ (aber $c < a$) geht der Hilfskegelschnitt in eine Hyperbel über, deren Asymptoten zugleich Asymptoten der Ortskurve sind. Nach diesen Bemerkungen führt die Gleichung $\varrho = \sqrt{r^2 + r_1^2}$ zu einer leichten Konstruktion der gesuchten Kurve.

Bezeichnet S den mit $\theta = 0$ anfangenden Sektor der gegebenen Ellipse, S_1 den Sektor des Hilfskegelschnittes und Σ den Sektor der Ortskurve, so ist immer

$$\Sigma = S + S_1.$$

Die gesamte, zwischen der Ortskurve und dem Hilfskegelschnitte enthaltene Fläche kommt der Ellipsenfläche gleich.

40. In eine Hyperbel ist eine Gerade von der konstanten Länge $2c$ als Sehne eingetragen und bei jeder ihrer möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Hyperbel gelegt; man sucht

die vom Durchschnittspunkte der Tangenten beschriebene Kurve und deren Fläche.

Als Polargleichung der Ortskurve ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}} - \frac{1}{\frac{b^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

oder

$$\varrho^2 = r^2 - r_1^2,$$

worin r den Radiusvektor der gegebenen Hyperbel, r_1 den Vektor eines Hilfskegelschnittes bedeutet. Letzterer ist für $c < a$ eine aus den Halbachsen

$$a_1 = \frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad b_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

konstruierte Ellipse, die in dem speziellen Falle $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Fig. 13.

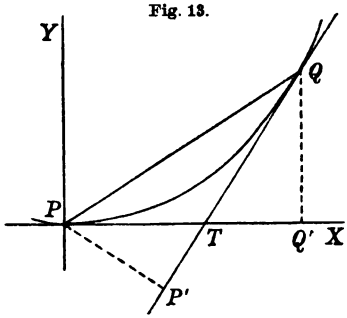
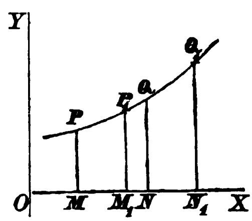


Fig. 14.



zu einem Kreise wird. Für $c = a$ besteht der Hilfskegelschnitt aus zwei Geraden, die in den Entfernungen $\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ parallel zur Ordinatenachse liegen; für $c > a$ wird er zu einer Hyperbel. In jedem Falle sind die Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel zugleich Asymptoten der Ortskurve.

Zwischen den Sektoren S, S_1, Σ der gegebenen Hyperbel des Hilfskegelschnittes und der Ortskurve besteht die Relation

$$\Sigma = S - S_1.$$

Im Falle $c < a$ ist die gesamte zwischen der Hyperbel und der Ortskurve liegende Flächse von endlicher Grösse und lässt sich durch einen Kreissektor darstellen.

41. **Näherungsweise Quadratur einer Mondsichel.** Auf einer gegebenen Kurve (Fig. 13) mögen zwei Punkte P und Q willkürlich, aber so gewählt sein, dass der Bogen PQ keinen aus-

gezeichneten Punkt enthält; man verlangt einen Näherungswert für die Fläche der Mondsichel, welche von der Sehne PQ und dem Bogen PQ begrenzt wird.

Durch die Punkte P und Q denke man sich an die Kurve Tangenten gelegt, die sich in T schneiden mögen; die Projektion von P auf QT heisse P', und dem analog sei Q' die Projektion von Q auf PT. Nimmt man P zum Anfange und die Tangente PT zur Abscissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und setzt $PQ' = x$, $Q'Q = y = \varphi(x)$, so hat man für die Fläche der Sichel

$$S = \tfrac{1}{2} x\,\varphi(x) - \int_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Es werde nun x so klein gewählt, dass sich $\varphi(x)$ mittels des Mac-Laurinschen Satzes entwickeln lässt; da zufolge des gewählten Koordinatensystemes $\varphi(0) = 0$ und zugleich $\varphi'(0) = 0$ ist, so hat die Entwicklung von $\varphi(x)$ die Form

$$\varphi(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \cdots$$

und es folgt hieraus

$$S = \tfrac{1}{6}Ax^3 + \tfrac{1}{4}Bx^4 + \tfrac{3}{10}Cx^5 + \cdots$$

Andererseits ist die Fläche des Dreiecks PQT

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}\left\{x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\right\}\varphi(x),$$

oder vermöge der für $\varphi(x)$ angegebenen Reihe

$$\varDelta = \tfrac{1}{4}Ax^3 + \tfrac{3}{8}Bx^4 + \frac{8AC - B^2}{16A}x^5 + \cdots$$

Der Vergleich der Formeln für S und $\varDelta$ führt zu der Relation

$$S - \tfrac{2}{3}\varDelta = \frac{31AC + 5B^2}{120A}x^5 + \cdots;$$

bei sehr kleinen x ist also die Mondsichel nahezu gleich zwei Dritteilen des umschriebenen Dreiecks PQT. Dieser Satz lässt sich bei manchen graphischen Arbeiten mit Vorteil benutzen.

§ 12.

Vermischte Aufgaben über Quadraturen.

I. Auf der Abscissenachse hat man eine Reihe gleicher Strecken $MM_1 = NN_1 \ldots = h$ abgeschnitten (Fig. 14, S. 102) und darüber die Flächen MM_1P_1P, NN_1Q_1Q u. s. w. konstruiert, die von einer durch

die Gleichung $y = f(x)$ bestimmten Kurve begrenzt werden; man sucht die grösste oder kleinste dieser Flächen.

Wenn für den Augenblick

$$\int f(x)\, dx = F(x) + Const.$$

gesetzt wird, so ist $F(x+h) - F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen; hieraus folgt

$$F'(x+h) - F'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f(x+h) = f(x),$$

ein Maximum oder Minimum kann also nur dann eintreten, wenn die Ordinaten MP und M_1P_1 gleich sind.

Beispiele. 1. Für die Kurve

$$b^2 y = a^2 x - x^3$$

ergiebt sich

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\tfrac{1}{3}(4a^2 - h^2)} - h\right\},$$

und zwar entspricht diesem Werte das Maximum des Flächenstreifens MM_1P_1P, falls $h < 2a$ ist.

2. Für die Kurve

$$y = \frac{b^2 x}{a^2 + x^2}$$

erhält man, dem Maximum des Flächenstreifens entsprechend,

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2 + h^2} - h\right).$$

3. Für die Kurve

$$y = x - b e^{\frac{x}{a}}$$

ist

$$x = a\, l\left\{\frac{a\varkappa}{b(e^{\varkappa} - 1)}\right\}, \quad \varkappa = \frac{h}{a},$$

und zwar entspricht diesem Werte das Maximum des Flächenstreifens.

II. Wie bei der vorigen Aufgabe sei $MM_1 = NN_1 \ldots$ konstant $= h$; man verlangt dasjenige x, bei welchem der zwischen dem Bogen PP_1 und der zugehörigen Sehne enthaltene mondförmige Abschnitt die grösste oder kleinste Fläche besitzt.

Das Maximum oder Minimum des Segments

$$\tfrac{1}{2} h[f(x+h) + f(x)] - [F(x+h) - F(x)]$$

tritt ein, wenn die Bedingung

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f'(x+h)+f'(x)}{2}$$

erfüllt ist. Bezeichnet man mit σ den Winkel zwischen der Sehne PP_1 und der Abscissenachse, mit τ und τ_1 die Winkel, welche die Tangenten in P und P_1 mit der x-Achse bilden, so kann man die vorstehende Bedingung in der einfachen Form darstellen

$$\tan\sigma = \tfrac{1}{2}(\tan\tau + \tan\tau_1).$$

Beispiel. Die Gleichung der Kurve sei

$$b^3y = x^3(a-x);$$

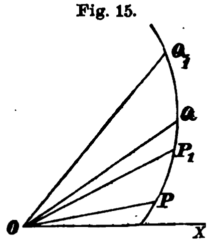
es ergiebt sich dann

$$x = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}h,$$

und zwar entspricht diesem Werte das Minimum des Segments.

III. Unter allen in einer gegebenen Kurve möglichen Sektoren POP_1, deren Centriwinkel POP_1 konstant $=\gamma$ ist, soll der an Fläche grösste oder kleinste Sektor bestimmt werden (Fig. 15).

Fig. 15.



Das Maximum oder Minimum tritt ein, wenn die einschliessenden Radiusvektoren $OP=r$ und $OP_1=r_1$, absolut genommen von gleicher Grösse sind.

Beispiel. In der Kurve

$$r = \tfrac{1}{2}a\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)$$

erhält der Sektor seinen Minimalwert für

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\gamma^2+4}-\gamma\right).$$

IV. Unter allen, demselben Centriwinkel γ entsprechenden, von dem Bogen PP_1 und der zugehörigen Sehne begrenzten Segmenten soll das an Fläche grösste oder kleinste bestimmt werden.

Das Maximum oder Minimum tritt ein, wenn die Bedingung

$$r_1^2 - r^2 = \left(r\frac{dr_1}{d\theta} + r_1\frac{dr}{d\theta}\right)\sin\gamma$$

erfüllt ist.

Beispiel. Für die reziproke parabolische Spirale erhält man

$$\theta = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \sin^2\gamma}} - 1\right),$$

und zwar entspricht diesem Werte das Minimum des Segments.

V. In einer Kurve sind Sehnen so gelegt, dass durch sie mondförmige Kurvensegmente von gleicher Fläche abgeschnitten werden; man sucht die Einhüllende jener Sehnen.

In Beziehung auf rechtwinklige Koordinaten sei $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve und zur Abkürzung

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.;$$

ferner mögen p und q die Abscissen der beiden Kurvenpunkte bezeichnen, durch welche die Sehne geht, endlich sei c^2 die Fläche des abgeschnittenen Segments; als Gleichung der Sehne hat man

$$(q - p)y - [f(q) - f(p)]\,x = qf(p) - pf(q),$$

und dabei sind p und q an die Bedingung gebunden

$$\tfrac{1}{2}(q - p)\{f(q) + f(p)\} - \{F(q) - F(p)\} = c^2.$$

Differenziert man diese Gleichungen, indem man q als abhängig von p betrachtet, und eliminiert aus den vier vorhandenen Gleichungen p, q und $\frac{dq}{dp}$, so erhält man die Gleichung der Einhüllenden.

Beispiele. 1. Nimmt man als Gleichung der Parabel

$$y = \frac{x^2}{a},$$

so werden die obigen zwei Gleichungen zu den folgenden

$$(p + q)\,x - ay = pq, \quad (q - p)^3 = 6ac^2,$$

und aus ihnen ergiebt sich

$$y = \frac{x^2}{a} + b,$$

wobei alle Segmente demjenigen Segmente gleichkommen, welches die Gerade $y = b$ von der ursprünglichen Parabel abschneidet.

2. Bei der Ellipse ist es zweckmässig

$$p = a \sin \varphi, \quad f(p) = b \cos \varphi$$
$$q = a \sin \psi, \quad f(q) = b \cos \psi$$

zu setzen; man findet dann leicht, dass die Einhüllende eine der ursprünglichen Ellipse ähnliche Ellipse ist.

Für die Hyperbel gilt ein analoger Satz.

3. Die gegebene Kurve sei eine Parabel dritten Grades, nämlich

$$x = \frac{x^3}{a^2};$$

die zwei Anfangsgleichungen sind dann

$$(p^2 + pq + q^2)x - a^2y = (p + q)pq,$$
$$(q - p)^3(q + p) = 4a^2c^2.$$

Aus der Vergleichung der hiernach berechneten Werte von $\frac{dq}{dp}$ erhält man

$$p + q = 2x,$$

nachher p, q und schliesslich als Gleichung der Einhüllenden

$$y = \frac{x^3}{a^2} + \sqrt{b^2x},$$

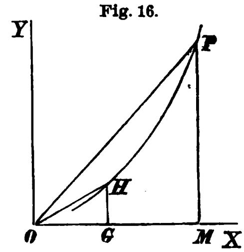
wobei b zur Abkürzung eingeführt ist.

§ 13.

Die Rektifikation ebener Kurven.

Allgemeine Regeln und Formeln. Ist die gegebene Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen (Fig. 16), $OM = x$, $MP = y$ und s der zu rektifizierende Bogen, der von dem festen Punkte H und dem beweglichen Punkte P begrenzt wird, so gilt die Formel

Fig. 16.



1) $$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx.$$

Die vorstehende Formel findet unmittelbare Anwendung, wenn x als unabhängige Variable betrachtet und demgemäss die Gleichung der Kurve nach y aufgelöst werden kann.

Denkt man sich G mit M und zugleich H mit P vertauscht, so ist $x < OG$ und der Bogen $PH = s$ nimmt ab, wenn x wächst; die unter dem Integralzeichen stehende Wurzel muss dann wegen $\frac{ds}{dx} < 0$ negativ genommen werden.

Falls die Kurvengleichung leichter nach y als nach x aufgelöst werden kann, nimmt man y zur unabhängigen Variabeln und schreibt

$$2)\qquad s=\int_{y_0}^{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot dy,$$

wobei hinsichtlich des Wurzelvorzeichens eine ähnliche Bemerkung wie vorhin gilt.

Wird die Kurve durch zwei Gleichungen charakterisiert, in denen x und y als Funktionen einer dritten unabhängigen Variabeln erscheinen, so sind auch dx und dy durch diese Variable auszudrücken und für sie die entsprechenden Integrationsgrenzen zu bestimmen.

In Polarkoordinaten hat man, falls r als Funktion von θ angesehen wird,

$$3)\qquad s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$

und umgekehrt, wenn θ als Funktion von r betrachtet wird,

$$4)\qquad s=\int_{r_0}^{r}\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\cdot dr.$$

Hinsichtlich der Wurzelvorzeichen gelten für die Formeln 3) und 4) ähnliche Bemerkungen wie bei 1) und 2).

Sind r und θ von einer dritten Variabeln abhängig, so sind auch dr und $d\theta$ durch diese auszudrücken und für sie die entsprechenden Integrationsgrenzen zu bestimmen.

Im Fall die Kurve HP Unterbrechungen der Kontinuität erleidet, besteht sie aus einzelnen, für sich kontinuierlichen Bögen; letztere müssen dann einzeln rektifiziert werden.

Beispiele. 1. Die Parabel. Nimmt man als Gleichung der Kurve

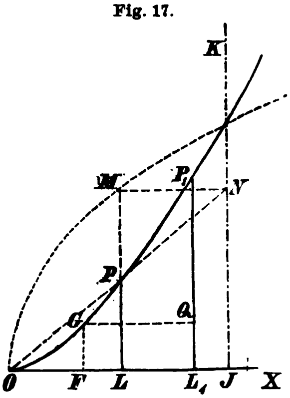
$$y^2=2px$$

und setzt $\sqrt{p^2+y^2}=u$, so erhält man für den vom Scheitel bis zum Punkte xy gerechneten Bogen

$$s=\frac{uy}{2p}+\tfrac{1}{2}pl\left(\frac{u+y}{p}\right).$$

2. Die semikubische Parabel lässt sich auf nachstehende Weise aus der gewöhnlichen Parabel herleiten. Es sei O der Scheitel, F der Brennpunkt der letzteren Parabel (Fig. 17), $OF = a$, $OJ = 3a$, JK senkrecht zur Parabelachse; $OL = x$ und $LM = 2\sqrt{ax}$ mögen die Koordinaten eines Parabelpunktes M darstellen. Verbindet man den Fusspunkt N der vom M auf JK gefällten Senkrechten mit O durch eine gerade Linie, so schneidet ON (oder deren Verlängerung) die Parabelordinate LM in einem Punkte P, der der semikubischen Parabel angehört und für den

Fig. 17.



$$LP = y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

ist. Der Bogen OP hat demnach die Länge

$$s = \tfrac{2}{3}\left\{\sqrt{\frac{(x+a)^3}{a}} - a\right\},$$

die sich auf folgende Weise konstruieren lässt. Man nehme $LL_1 = a$ und vermindere die zu L_1P_1 um die zum Punkte F gehörende Ordinate FG; der Rest P_1Q ist $= \operatorname{arc} OP$.

3. Für die auf S. 94 des I. Teils unter Nr. 7 betrachtete Kurve hat man

$$y = \frac{x - 3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

und hieraus folgt für den vom Koordinatenanfange bis zum Punkte xy gerechneten Bogen

$$s = \frac{x + 3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} = 2\sqrt{ax} + y = \sqrt{\tfrac{4}{3}x^2 + y^2}.$$

Die von der Kurve gebildete Schlinge besitzt den Umfang $4\sqrt{3}\,.\,a$.

4. Rechnet man in der Kurve

$$y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x}$$

den Bogen s vom unteren Kulminationspunkte bis zum Punkte xy, so ist für $x > a$

$$s = \frac{x^3}{6a^2} - \frac{a^2}{2x} + \tfrac{1}{3}a,$$

dagegen für $x < a$

$$s = -\frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x} - \tfrac{1}{3}a.$$

5. Die Gleichung der Kurve sei

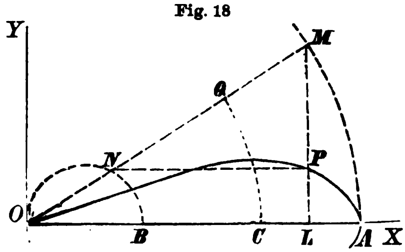
$$y = \tfrac{3}{8}\left\{\sqrt[3]{\frac{x^4}{a}} - 2\sqrt[3]{ax^2}\right\};$$

der vom Koordinatenanfange ab bis zum Punkte xy gerechnete Bogen ist dann

$$s = y + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2} = \sqrt{\tfrac{9}{8}x^2 + y^2}.$$

6. Mit dem Radius $OA = a$ ist aus O ein Kreis beschrieben (Fig. 18) und über den Durchmesser $OB = \frac{a}{\sqrt{8}}$ ein zweiter Kreis; wird nun durch O eine beliebige Gerade gelegt, die den ersten Kreis in M, den zweiten in N schneidet, und durch M eine Senkrechte zu OA, durch N eine Parallele zu OA gelegt, so ist der Durchschnitt der letzteren zwei Geraden ein Punkt P, zwischen dessen Koordinaten $OL = x$ und $LP = y$ die Gleichung besteht

Fig. 18



$$8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2).$$

Für den Bogen $OP = s$ der vom Punkte P beschriebenen Kurve gilt die Formel

$$s = y + \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Beschreibt man aus O mit dem Radius $OC = 2OB$ einen zwischen die Schenkel des Winkels AOM fallenden Kreisbogen CQ, so ist $\operatorname{arc} OP = LP + \operatorname{arc} CQ$. Der ganze Umfang der schleifenförmigen Kurve gleicht der Peripherie des mit OC beschriebenen Kreises.

7. Die Gleichung der gegebenen Kurve sei

$$9b^4x^2 = 4(y^2 - b^2)^3;$$

da es hier bequemer ist, nicht x sondern y als unabhängige Variable zu betrachten, so drückt man auch s durch y aus und erhält

$$s = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{b^2} - y + \frac{1}{3} b,$$

wobei der Bogen von dem Durchschnitte der Kurve mit der Ordinatenachse an gerechnet ist.

8. Die Cissoide. Bezeichnet man den Durchmesser des erzeugenden Kreises mit b, so erhält man aus der Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{b - x}}$$

die folgende Formel für den vom Koordinatenanfange aus gerechneten Bogen:

$$s = \frac{1}{2} b \int_0^x \sqrt{\frac{4b - 3x}{b - x}} \cdot \frac{dx}{b - x}.$$

Die Integration ist leicht auszuführen mittels der Substitution

$$\frac{4b - 3x}{b - x} = u^2,$$

und man findet

$$s = b \left\{ \sqrt{\frac{4b - 3x}{b - x}} - 2 - \sqrt{3} \,.\, l \left(\frac{\sqrt{4b - 3x} + \sqrt{3(b - x)}}{(2 + \sqrt{3}) \sqrt{b}} \right) \right\}.$$

9. Bei der in Tl. I, S. 98 unter Nr. 12 betrachteten Astroide (Fig. 8, S. 93) ist es von Vorteil, die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

durch die beiden Gleichungen

$$x = a \cos^3 \psi, \quad y = a \sin^3 \psi$$

zu ersetzen; der von A bis P gerechnete Bogen bestimmt sich dann mittels der Formel

$$s = \frac{3}{2} a \sin^2 \psi = \sqrt[3]{a y^2},$$

wonach der Bogen $AP = \frac{3}{2} PS$ ist. Der Umfang der ganzen Kurve gleicht dem Umfange des in den Kreis AQB beschriebenen regelmässigen Sechsecks.

10. Die Evolute der Ellipse. Bezeichnet a die grosse, b die kleine Halbachse der Ellipse, so ist die Gleichung der Ellipsenevolute

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

wofür man bequemer schreibt

$$x = a_1 \cos^3 \omega, \quad y = b_1 \sin^3 \omega.$$

Der Bogen vom Durchschnitte der Kurve mit der Abscissenachse bis zum Punkte xy ist hiernach

$$s = \frac{\sqrt{(a_1^2 \sin^2 \omega + b_1^2 \cos^2 \omega)^3} - b_1^3}{a_1^2 - b_1^2}$$

und der ganze Umfang der Evolute

$$= 4\frac{a_1^3 - b_1^3}{a_1^2 - b_1^2} = 4\frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

11. Eine Kurve werde dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$x = at^m, \quad y = \tfrac{1}{2} ma\left(\frac{t^{m-n}}{m-n} - \frac{t^{m+n}}{m+n}\right),$$

worin $m > n > 0$ sein möge; für den vom Koordinatenanfange ab gerechneten Bogen ist dann

$$s = \tfrac{1}{2} ma\left(\frac{t^{m-n}}{m-n} + \frac{t^{m+n}}{m+n}\right),$$

woraus die Relation folgt

$$s^2 = \frac{m^2}{m^2 - n^2} x^2 + y^2.$$

12. Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = al\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right);$$

der vom Koordinatenanfange aus gerechnete Bogen ist dann

$$s = al\left(\frac{a+x}{a-x}\right) - x.$$

13. Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = \frac{x^2}{4a} - \frac{a}{2} l\left(\frac{x}{a}\right);$$

für den vom unteren Kulminationspunkte an gerechneten Bogen ergiebt sich dann

$$s = \frac{x^2 - a^2}{4a} + \frac{a}{2} l\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x^2}{2a} - (\tfrac{1}{2}a + y).$$

14. Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = 2\,al\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right) - 4\sqrt{ax};$$

der vom Koordinatenanfange aus gerechnete Bogen ist dann

$$s = 2\,a\,l\left(\frac{a}{a-x}\right) - x.$$

15. Die logarithmische Linie. Aus der Gleichung

$$y = be^{\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad x = al\left(\frac{y}{b}\right)$$

folgt als Länge des Bogens, dessen Horizontalprojektion x ist,

$$s = \sqrt{a^2+y^2} - \sqrt{a^2+b^2} + al\left(\frac{b}{y}\cdot\frac{\sqrt{a^2+y^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right).$$

16. Die Kettenlinie. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ergiebt sich für die Länge des Bogens, der x als Horizontalprojektion hat,

$$s = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2-a^2},$$

woraus eine einfache Konstruktion des Bogens folgt.

17. Die Traktorie der Geraden. Aus der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}al\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}\right) - \sqrt{a^2-y^2}$$

ergiebt sich als Länge des Bogens, dessen Horizontalprojektion x ist,

$$s = al\left(\frac{y}{a}\right).$$

18. Die Kardioide. Aus der Gleichung

$$r = 2a(1+\cos\theta)$$

ergiebt sich für den von $\theta_0 = 0$ ab gerechneten Bogen

$$s = 8a\sin\tfrac{1}{2}\theta.$$

Der ganze Umfang der Kurve beträgt hiernach $16a$.

19. **Die Spirale des Archimedes.** Die Gleichung $r = a\theta$ liefert für den vom Koordinatenanfang gerechneten Bogen

$$s = \tfrac{1}{2}a\{\theta\sqrt{1+\theta^2} + l(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\}.$$

20. Die Polargleichung einer Kurve sei

$$r = a(\theta^2 - 1);$$

für den von $\theta_0 = 0$ ab gerechneten Bogen ist dann

$$s = a(\theta + \tfrac{1}{3}\theta^3).$$

Die von der Kurve gebildete Schlinge hat den Umfang $\frac{8}{3}a$.

21. **Die hyperbolische Spirale.** Rechnet man den Bogen von dem Punkte an, dessen Radiusvektor $= a$ ist, so führt die Gleichung $r\theta = a$ zu der Formel

$$s = a\left\{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta} + l\left(\frac{\theta + \sqrt{1+\theta^2}}{1+\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

22. Die Gleichung einer Spirale sei

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r} + \frac{r}{a}\right)$$

und der Bogen werde von demjenigen Punkte an gerechnet, dessen Radiusvektor $= a$ ist; für $r > a$ erhält man

$$s = \frac{r^2 - a^2}{4a} + \frac{a}{2}l\left(\frac{r}{a}\right),$$

dagegen für $r < a$

$$s = \frac{a^2 - r^2}{4a} + \frac{a}{2}l\left(\frac{a}{r}\right).$$

23. **Die logarithmische Spirale.** Rechnet man den Bogen von dem Punkte aus, dessen Radiusvektor $= a$ ist, so führt die Gleichung $r = ae^{\beta\theta}$ zu der Formel

$$s = \frac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}(e^{\beta\theta} - 1) = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}(r - a).$$

Für $\theta = -\infty$ erhält man den von jenem Anfangspunkte bis zum asymptotischen Punkte gehenden, aus unendlich vielen Windungen bestehenden Bogen; dieser ist von endlicher Grösse und seinem absoluten Werte nach

$$= \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}a.$$

24. Die Gleichung einer Spirale sei

$$r = a\frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1};$$

für den vom Koordinatenanfange ab gerechneten Bogen ergiebt sich

$$s = a\theta - r.$$

25. Die Kreisevolvente. Wird der Bogen vom Anfangspunkte der Kurve aus gerechnet, so führt die Gleichung

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - Arccos\frac{a}{r}$$

zu der Formel

$$s = \frac{r^2 - a^2}{2a},$$

die eine einfache Konstruktion gestattet.

26. Die Traktorie des Kreises. Aus der Gleichung

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - Arccos\frac{r}{a}$$

ergiebt sich für den von $r = a$ an gerechneten Bogen

$$s = al\left(\frac{r}{a}\right).$$

27. Die Cykloide. Ist $MN = b$ der Radius des erzeugenden Kreises, $\angle NMP = \omega$ der Wälzungswinkel, $AL = x$, $LP = y$ und $arc\,AP = s$ (Fig. 19), so führen die Gleichungen

$$x = b(\omega - sin\,\omega), \quad y = b(1 - cos\,\omega)$$

zu der Formel

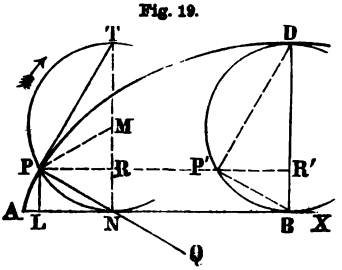
$$s = 4b(1 - cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

Die Länge eines Cykloidenzugs beträgt hiernach $8b$. Ferner ist

$$arc\,DP = 2DP'$$

oder für $DR' = \xi$, $arc\,DP = \sigma$

Fig. 19.



$$\sigma = 2\sqrt{2b\xi};$$

die vom Scheitel D an gerechneten Bögen lassen sich hiernach als Ordinaten einer Parabel konstruieren, deren Scheitel D und deren Brennpunkt B ist.

28. **Die Epicykloide.** Aus den Gleichungen

$$x = (a + b) \sin \frac{b\omega}{a} - b \sin \frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a + b) \cos \frac{b\omega}{a} - b \cos \frac{(a+b)\omega}{a}$$

erhält man für den von $\omega = 0$ an gerechneten Bogen

$$s = \frac{4(a+b)b}{a}(1 - \cos \tfrac{1}{2}\omega),$$

mithin für einen ganzen Zug der Kurve die Länge

$$\frac{8(a+b)b}{a}.$$

Der von der Mitte eines Zuges aus gerechnete Bogen lässt sich mit der Tangente am Endpunkte des Bogens in eine einfache Beziehung setzen.

Für die Hypocykloide gelten ähnliche Formeln.

29. Eine Kurve sei durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$x = a \sin \varphi - \tfrac{1}{3}(a - b) \sin^3 \varphi;$$

$$y = b \cos \varphi + \tfrac{1}{3}(a - b) \cos^3 \varphi;$$

der mit $\varphi = 0$ beginnende Bogen ist dann

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b)\varphi + \tfrac{1}{2}(a - b) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Der ganze Umfang der Kurve gleicht der Peripherie eines mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}(a + b)$ beschriebenen Kreises.

30. Dem Vorigen ähnlich mögen die Gleichungen einer Kurve sein

$$x = a \sin \varphi - \tfrac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \sin^3 \varphi,$$

$$y = b \cos \varphi - \tfrac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \cos^3 \varphi;$$

der von $\varphi = 0$ an gerechnete Bogen ist dann

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b)\varphi + \tfrac{1}{2}(a - b) \sin \varphi \cos \varphi,$$

also von derselben Grösse wie in Nr. 29.

31. Durch die beiden Gleichungen

$$x = a[(1 - \omega^2) \cos \omega + 2\omega \sin \omega - 1],$$

$$y = a[(1 - \omega^2) \sin \omega - 2\omega \cos \omega]$$

wird eine Spirale bestimmt; der vom Koordinatenanfange ausgehende Bogen ist

$$s = a(\omega + \tfrac{1}{3}\omega^3) = \frac{2a+\varrho}{3}\sqrt{\frac{\varrho - a}{a}},$$

wobei ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet.

32. Eine Kurve sei durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$r = ae^{\arcsin t}\sqrt{1-t^2}, \quad \theta = \arcsin t - \tfrac{1}{2}l(1-t^2);$$

der von $t = 0$ ab gerechnete Bogen ist dann

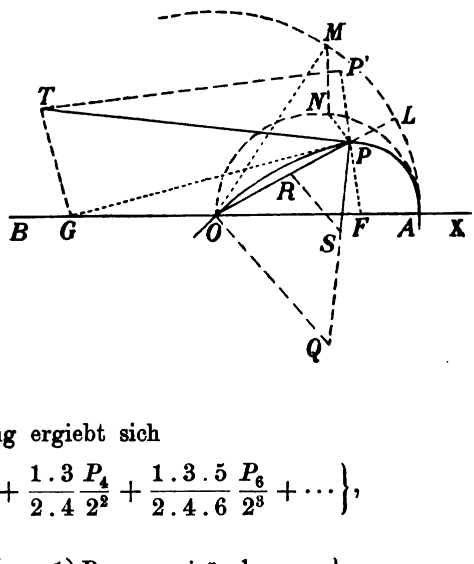
$$s = \sqrt{2} \,.\, a(e^{\arcsin t} - 1),$$

woraus für die Gesamtlänge der Spirale ein endlicher Wert folgt.

33. Die Lemniskate. Aus der Polargleichung $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ erhält man für den Bogen AP:

$$s = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}}$$

Fig. 20.



oder, wenn man den Winkel $AOM = \varphi$ (Fig. 20) mittels der Gleichung

$$\sin\theta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}$$

als unabhängige Variable einführt,

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}};$$

Durch Reihenentwicklung ergiebt sich

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\left\{P_0 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{P_4}{2^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{P_6}{2^3} + \cdots\right\},$$

$$P_0 = \varphi, \quad P_n = \frac{1}{n}\{(n-1)P_{n-2} - \sin^{n-1}\varphi\cos\varphi\}.$$

Für den Lemniskatenquadranten $APO = q$ findet man einfacher

$$q = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right\},$$

woraus folgt, dass die Länge der ganzen Kurve $= 5{,}2441 \,.\, a$ ist.

34. Die Ellipse. Ersetzt man die Gleichung der Kurve durch die beiden Gleichungen

$$x = a\,sin\,\varphi, \quad y = b\,cos\,\varphi,$$

worin φ den Winkel COM (Fig. 21) bedeutet, so ist die Länge des Bogens BP

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 cos^2\varphi + b^2 sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

oder, wenn ε die numerische Exzentrizität der Ellipse bedeutet,

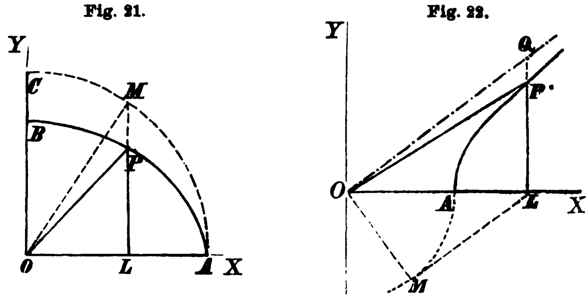
$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 sin^2\varphi}\,.\,d\varphi.$$

Mittels des binomischen Satzes erhält man

$$s = a\left\{P_0 - \frac{P_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{P_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{P_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots\right\},$$

wobei P_0, P_2, P_4, u. s. w. dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 33.

Fig. 21. Fig. 22.



Für die Länge des Ellipsenquadranten ergiebt sich hieraus

$$E = \tfrac{1}{2}\pi a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right\}.$$

Wenn a und b wenig von einander verschieden sind, so kann man nach Tl. I, S. 316, Nr. 12 näherungsweise

$$E = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right\}$$

nehmen, und der begangene Fehler beträgt dann weniger als

$$\frac{\pi a}{180}\cdot\frac{\varepsilon^6}{1-\varepsilon^2}.$$

Bezeichnet E_1 den Quadranten einer aus den Halbachsen 1 und $\frac{b}{a}$ konstruierten Ellipse, die der vorigen Ellipse ähnlich ist, so be-

trägt die entsprechende numerische Exzentrizität ε_1 ebensoviel wie ε, und daher ist

$$E = aE_1;$$

die Umfänge ähnlicher Ellipsen verhalten sich demnach wie deren Halbachsen. Auf diesem Satze beruht die Einrichtung einer Tafel der Ellipsenumfänge.

35. Die Hyperbel. Ersetzt man die Gleichung der Kurve durch die beiden Gleichungen

$$x = a \sec\varphi, \quad y = b \tan\varphi,$$

worin φ den Winkel AOM bezeichnet (Fig. 22, S. 118), so ist die Länge des Bogens AP

$$s = a\varepsilon \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Mittels des binomischen Satzes folgt hieraus

$$s = a\left\{\varepsilon \tan\varphi - \frac{Q_0}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{Q_2}{4\varepsilon^3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{Q_4}{6\varepsilon^5} - \cdots\right\},$$

$$Q_0 = \varphi, \quad Q_n = \frac{1}{n}\{(n-1)Q_{n-2} + \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi\}.$$

Die Verlängerung der Ordinate LP schneidet von der Asymptote eine Strecke $OQ = z$ ab, deren Grösse ist

$$z = \varepsilon x = a\varepsilon \sec\varphi;$$

hiernach ist

$$z - s = a\varepsilon \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi) + \frac{a}{2\varepsilon}\left\{Q_0 + \frac{1}{2}\frac{Q_2}{2\varepsilon^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{Q_4}{3\varepsilon^4} + \cdots\right\}.$$

Bei unendlich wachsenden x konvergiert φ gegen die Grenze $\frac{1}{2}\pi$ und es wird

$$Lim(z - s) = \frac{\pi a}{4\varepsilon}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{1}{3\varepsilon^4} + \cdots\right\};$$

der Unterschied zwischen einer vom Koordinatenanfange aus ins Unendliche gehenden Asymptote und dem zugehörigen Hyperbelquadranten ist demnach von endlicher Grösse

36. Durch die Gleichung

$$r = a\cos\theta + b$$

wird eine Kurve charakterisiert, von der die Kardioide ein besonderer Fall ist; für den von $\theta_0 = 0$ ab gerechneten Bogen erhält man

$$s = \int_0^{\theta} \sqrt{(a+b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta + (a-b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}\,.\,d\theta.$$

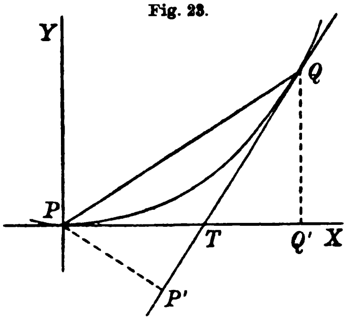
Konstruiert man eine Ellipse aus den Halbachsen

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \pm \frac{a-b}{2},$$

nimmt darin den Winkel $\varphi = \frac{1}{2}\theta$ und nennt s_1 den entsprechenden Ellipsenbogen, so ist $s = 4s_1$.

37. **Näherungsweise Rektifikation.** Behält man unverändert die Voraussetzungen und Bezeichnungen bei, welche in § 11 Nr. 41 (Fig. 23) angewendet wurden, so erhält man aus der Formel

Fig. 23.



$$s = \int_0^x \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,.\,dx$$

die Reihenentwicklung

$$s = x + \tfrac{2}{3}A^2x^3 + \tfrac{3}{2}ABx^4 + \cdots$$

Andererseits ist die Sehne

$$PQ = \sqrt{x^2 + [\varphi(x)]^2}$$
$$= x + \tfrac{1}{2}A^2x^3 + ABx^4 + \cdots;$$

ferner

$$PQ' = x, \quad QP' = \frac{x + \varphi(x)\,\varphi'(x)}{\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}},$$

$$PQ' + QP' = 2x - 3ABx^4 - \cdots,$$

$$\tfrac{4}{3}PQ - \tfrac{1}{6}(PQ' + QP') = x + \tfrac{2}{3}A^2x^3 + \tfrac{11}{6}ABx^4 + \cdots$$

Der Vergleich mit der Formel für s führt zu dem Satze, dass bei kleinen Bögen näherungsweise

$$arc\,PQ = \tfrac{4}{3}PQ - \tfrac{1}{6}(PQ' + QP')$$

gesetzt werden darf; bei graphischen Arbeiten lässt sich diese Relation mit Vorteil benutzen.

§ 14.

Vermischte Aufgaben über Rektifikationen.

I. Auf der Abscissenachse hat man eine Reihe gleicher Strecken $MM_1 = NN_1 \ldots = h$ abgeschnitten, welche die Horizontalprojektion der Bögen PP_1, $QQ_1 \ldots$ darstellen; man sucht den grössten oder kleinsten jener Bögen (Fig. 24).

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve $PP_1QQ_1 \ldots$, so tritt das Maximum oder Minimum ein, wenn die Bedingung

$$[f'(x+h)]^2 = [f'(x)]^2$$

stattfindet, d. h. wenn die Tangenten in P und P_1 gleiche Winkel mit der Abscissenachse bilden.

Beispiel. In der Kurve

$$y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x}$$

wird der fragliche Bogen am grössten für

$$x = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}h^2} - \tfrac{1}{2}h.$$

II. Unter allen in einer gegebenen Kurve zu gleichen Centriwinkeln $POP_1 = QOQ_1 \ldots = \gamma$ gehörenden Bögen PP_1, $QQ_1, \ldots$ soll der grösste oder kleinste bestimmt werden (Fig. 25).

Fig. 24.

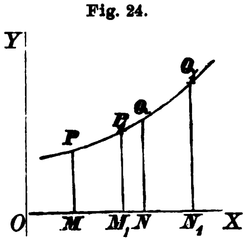
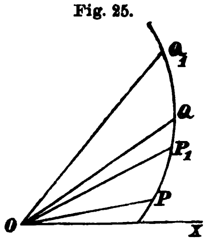


Fig. 25.



Ist $r = f(\theta)$ die Polargleichung der Kurve, so tritt das gesuchte Maximum oder Minimum ein für

$$[f(\theta+\gamma)]^2 + f'(\theta+\gamma)]^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2,$$

d. h. wenn die Polarnormalen in den Punkten P und P_1 gleich sind.

Beispiel. Die Gleichung der Kurve sei

$$r = a(2\theta - \theta^2);$$

der fragliche Bogen wird dann am kleinsten für

$$\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma.$$

§ 15.

Quadratur und Rektifikationen zweier besondern Gattungen von Kurven.

I. Die Evoluten. In einer durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmten Kurve sei C ein fester, P ein beweglicher Punkt (Fig. 26), und es mögen diesen Punkten die Krümmungsmittelpunkte D und Q entsprechen; man sucht den Flächeninhalt V des Vierecks, das

von den Krümmungsradien CD, PQ, dem Bogen CP und dem zugehörigen Evolutenbogen DQ begrenzt wird.

Das Differential von V lässt sich als ein Kreissektor betrachten, dessen Radius $QP = \varrho$ und dessen Centriwinkel $= d\tau$ ist; man hat demnach

$$dV = \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\tau$$

und vermöge der Werte von ϱ und τ

$$V = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\,dx.$$

Beispiele hierzu bieten die Parabel, Ellipse, Hyperbel, logarithmische Linie, Kettenlinie u. a.

Fig. 26.

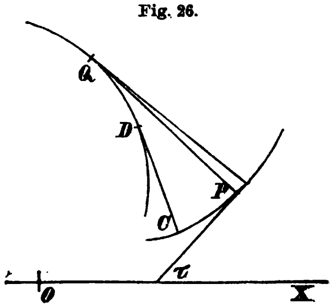
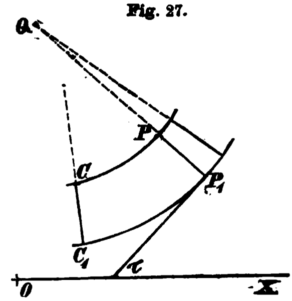


Fig. 27.



Die Rektifikation der Evoluten beruht auf den für den Punkt Q geltenden Gleichungen

$$\xi = x - \varrho \sin\tau, \quad \eta = y + \varrho \cos\tau.$$

Unter Rücksicht auf die Formeln

$$\cos\tau = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\tau = \frac{dy}{ds}, \quad \varrho = \frac{ds}{d\tau}$$

erhält man

$$d\xi = -\sin\tau\,.\,d\varrho, \quad d\eta = +\cos\tau\,.\,d\varrho,$$

mithin für das Bogenelement $d\sigma$ der Evolute

$$d\sigma = d\varrho,$$

woraus folgt

$$\sigma = \varrho - \varrho_0,$$

d. h. der zwischenliegende Bogen ist gleich der Differenz zwischen den entsprechenden Krümmungsradien der ursprünglichen Kurve.

Wird ein vollkommen biegsamer, nicht dehnbarer Faden um die Evolute herumgelegt, mit einem Ende an derselben befestigt und so abgewickelt, dass er immer gespannt bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt die ursprüngliche Kurve (Evolvente). Ist die Gleichung der letzteren eine algebraische, so ist ϱ eine algebraische Funktion von x mithin auch von ξ, folglich kann die Evolute in diesem Falle algebraisch rektifiziert werden.

II. Parallele Kurven. Auf der zum beliebigen Punkte P einer gegebenen Kurve gehörenden Normale PQ ist von P aus die Strecke $PP_1 = c$ abgeschnitten worden (Fig. 27); verfährt man auf diese Weise mit allen Kurvenpunkten, so erhält man als geometrischen Ort des Punktes P_1 eine neue Kurve C_1P_1, die der ersten parallel ist in der Entfernung $CC_1 = PP_1 = c$. Hierbei wird c als positiv oder negativ angesehen, je nachdem P_1 auf der Verlängerung des Krümmungshalbmessers QP oder umgekehrt liegt. Bezeichnen x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P_1, so gelten die Gleichungen

$$x_1 = x + c \sin \tau, \quad y_1 = y - c \cos \tau,$$

aus denen man erhält

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} = y',$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} : \frac{dx_1}{dx} = \frac{y''}{1 + \frac{cy''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}},$$

und für den Krümmungshalbmesser der Parallelkurve

$$\varrho_1 = \varrho + c.$$

Ferner ergeben sich die Bogenelemente

$$ds = \sec \tau \,.\, dx,$$

$$ds_1 = \sec \tau \,.\, dx_1 = \sec \tau (dx + c \cos \tau \, d\tau) = ds + c \, d\tau.$$

Rechnet man beide Bögen von einer gemeinschaftlichen Normale CC_1 ab, die mit der Ordinatenachse den Winkel γ einschliesst, setzt also $\tau_0 = \gamma$, so ist

$$s_1 - s = c(\tau - \gamma),$$

also die Differenz der entsprechenden Bögen gleich einem Kreisbogen, welcher c zum Radius und den Winkel zwischen den begrenzenden Bögen zum Centriwinkel hat.

Das Differential der Fläche $CC_1P_1P = U$ lässt sich als Unterschied zweier Kreissektoren betrachten, daher

$$U = \frac{1}{2}\int_\gamma^\tau \varrho_1^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_\gamma^\tau \varrho^2 d\tau = \frac{1}{2}c\int_\gamma^\tau (2\varrho + c)\,d\tau,$$

also

$$U = cs + c^2(\tau - \gamma).$$

Unter Rücksicht auf die vorige Relation $c(\tau - \gamma) = s_1 - s$ wird hieraus

$$U = \frac{1}{2}c(s_1 + s),$$

d. h. die Fläche CPP_1C_1 kommt der Fläche eines Trapezes gleich, welches die Bögen CP, C_1P_1 zu parallelen Seiten und den Abstand CC_1 zur Höhe hat.

Die beiden erwähnten Sätze sind übrigens an die Bedingung gebunden, dass die parallelen Bögen keine Inflexionspunkte oder Spitzen enthalten.

§ 16.

Die Rektifikation räumlicher Kurven.

Allgemeine Regeln und Formeln. Wenn die Kurve durch ihre Projektionen auf die Ebenen xy und xz bestimmt ist, so gilt für den zwischen einem festen Punkte $x_0y_0z_0$ und dem beweglichen Punkte xyz enthaltenen Bogen s die Formel

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Im Fall die Kurve durch ihre Projektionen auf die Ebenen zy und zx bestimmt ist, hat man analog

$$s = \int_{z_0}^{z} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \cdot dz.$$

Wenn die Kurve durch drei Gleichungen in der Weise bestimmt ist, dass jede der Koordinaten x, y, z als Funktion einer vierten Variablen t erscheint, so hat man dx, dy, dz mithin auch ds und s durch t auszudrücken und die Integrationsgrenzen für t entsprechend zu bestimmen.

Nicht selten sind unmittelbar nur zwei Flächen gegeben, als deren Durchschnitt die zu rektifizierende Kurve betrachtet wird; in diesem Falle müssen die Gleichungen von zwei Projektionen der Kurve aus den Gleichungen jener Fläche hergeleitet werden.

Erleidet die Kurve zwischen den Punkten $x_0 y_0 z_0$ und xyz Unterbrechungen der Kontinuität, so besteht der Bogen s aus mehreren Bögen, welche einzeln rektifiziert werden müssen.

Beispiele. 1. In der durch die Gleichungen

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

bestimmten Kurve ist der vom Koordinatenanfange ab gerechnete Bogen

$$s = x + z.$$

2. Die Gleichungen der Kurve mögen sein

$$y = \frac{x^2}{4a}, \quad z = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}};$$

es ist dann, wenn der Bogen vom Koordinatenanfange aus gerechnet wird,

$$s = x + y.$$

3. Die Gleichungen

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}} + 2\sqrt{ax}, \quad z = \sqrt{5ax}$$

geben für den vom Koordinatenanfang ab gerechneten Bogen

$$s = y + \frac{z}{\sqrt{5}}.$$

4. Aus den beiden Gleichungen

$$y = 2\sqrt{ax} - x, \quad z = x - \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

erhält man für den vom Koordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s = x + y - z.$$

5. Rechnet man in der Kurve

$$y = 2\sqrt{2bx}, \quad z = bl\left(\frac{x}{a}\right)$$

den Bogen von $x = a$ aus, so ist

$$s = x + z - a.$$

6. Die Gleichungen

$$y=\sqrt{2ax-x^2},\quad z=al\left(\frac{2a}{2a-x}\right)$$

liefern für den vom Koordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s=al\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}\right).$$

7. Aus den Gleichungen

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad z=\tfrac{1}{4}al\left(\frac{a+x}{a-x}\right)-\tfrac{1}{2}x$$

ergiebt sich für den von $x=0$ ab gerechneten Bogen

$$s=x+z.$$

8. Aus den Gleichungen

$$y=a\,.\,arcsin\frac{x}{a},\quad z=\tfrac{1}{4}al\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

ergiebt sich für den vom Koordinatenanfange aus gerechneten Bogen

$$s=x+z.$$

9. Die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\quad x=\tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

liefern für den von $x=0$ aus gerechneten Bogen

$$s=\varepsilon\sqrt{x^2-a^2},$$

worin ε die numerische Exzentrizität der Horizontalprojektion bedeutet.

10. Die Gleichungen der Kurve mögen sein

$$x=\tfrac{1}{2}cl\left(\frac{c+\sqrt{c^2-z^2}}{c-\sqrt{c^2-z^2}}\right)-\sqrt{c^2-z^2},\quad y=c\,.\,arcsin\frac{z}{c},$$

und der Bogen werde von $z=c$ an gerechnet; beachtet man, dass der Zunahme von z eine Abnahme von s entspricht, mithin ds negativ zu nehmen ist, so erhält man

$$s=x+\sqrt{c^2-z^2}.$$

11. Eine Kurve sei bestimmt als Durchschnitt der Flächen

$$4ax=(y+z)^2,\quad \tfrac{4}{3}x^2+y^2=z^2,$$

deren erste ein parabolischer Cylinder, und deren zweite ein elliptischer Kegel ist; beachtet man, dass die zweite Gleichung in der Form

$$(z + y)(z - y) = \tfrac{4}{3}x^2$$

dargestellt werden kann, so findet man leicht

$$z + y = 2\sqrt{ax}, \quad z - y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

und hieraus

$$s = z\sqrt{2},$$

wobei der Bogen vom Koordinatenanfange aus gezählt ist.

12. Eine Kurve sei bestimmt als Durchschnitt der Flächen

$$(z - y)^2 = 3a(z + y), \quad z^2 = \tfrac{9}{8}x^2 + y^2,$$

deren erste ein parabolischer Cylinder, und deren zweite ein elliptischer Kegel ist; auf ähnliche Weise wie vorhin findet man

$$z - y = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2}, \quad z + y = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{x^4}{a}},$$

und für den vom Koordinatenanfange aus gezählten Bogen

$$s = z\sqrt{2}.$$

13. Eine Kurve sei bestimmt als Durchschnitt der Flächen

$$z = \frac{x^2 - y^2}{9c\sqrt{2}}, \quad (x + y)^2 = \frac{3(x - y)z}{\sqrt{2}},$$

deren erste ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, und deren zweite ein elliptischer Kegel ist; drückt man x und y durch z aus, so erhält man für den vom Koordinatenanfange ab gerechneten Bogen

$$s = \frac{x - y}{\sqrt{2}} + z.$$

14. Eine Kurve sei bestimmt als Durchschnitt einer Cylinderfläche dritten Grades und eines elliptischen Kegels, deren Gleichungen sind

$$x^3 = a^2(y + z), \quad z^2 = \tfrac{1}{3}x^2 + y^2;$$

rechnet man den Bogen von der Stelle aus, wo die Horizontalprojektion der Kurve die x-Achse schneidet, so erhält man

$$s = y\sqrt{2}.$$

15. Die zu rektifizierende Kurve sei die konische Schraubenlinie (Tl. I, S. 147), die als Durchschnitt der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \gamma, \quad \frac{y}{x} = \tan \frac{z}{c}$$

angesehen werden kann; drückt man x und y durch z aus, so erhält man

$$s = \frac{1}{2 \cos \gamma} \left\{ \frac{z \sqrt{k^2 + z^2}}{k} + k\, l \left(\frac{z + \sqrt{k^2 + z^2}}{k} \right) \right\},$$

wobei der Bogen vom Koordinatenanfange aus gerechnet und zur Abkürzung $c \csc \gamma = k$ gesetzt ist. Demnach ist s proportional dem Bogen einer gewissen Parabel.

16. Der Durchschnitt der Flächen

$$x^2 + y^2 = cz, \quad \frac{y}{x} = \tan \frac{z}{c}$$

liefert eine **paraboloidische Schraubenlinie**; der vom Koordinatenanfange gerechnete Bogen wird durch die Formel

$$s = \sqrt{cz} + \tfrac{2}{3} \sqrt{\frac{z^3}{c}} = r + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{rz}{c}$$

bestimmt, in der zur Abkürzung $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ gesetzt ist.

17. Der Durchschnitt der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 = \gamma^2 z^2, \quad \beta \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} = l \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)$$

bildet eine **konische Spirale**, deren Horizontalprojektion eine logarithmische Spirale ist. Setzt man

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta,$$

und betrachtet r als unabhängige Variable, so hat man einfacher

$$\theta = \frac{1}{\beta} l \left(\frac{r}{a} \right), \quad z = \frac{r}{\gamma};$$

ferner ist $dx^2 + dy^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2$, mithin der vom Koordinatenanfange gerechnete Bogen

$$s = \int_0^r \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2} \cdot dr,$$

und vermöge der Werte von θ und z

$$s = r \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}.$$

18. Auf einem durch die Gleichung

$$2bz = x^2 + y^2$$

bestimmten Rotationsparaboloide ist eine Spirale konstruiert, deren Horizontalprojektion die Gleichung

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - Arccos\frac{a}{r}$$

hat, also eine Kreisevolvente ist; nach dem vorigen Verfahren ergiebt sich für den von $r = a$ aus gerechneten Bogen

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \cdot \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

19. Auf einer durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

bestimmten Kugelfläche ist eine Spirale konstruiert, deren Horizontalprojektion die Gleichung

$$r = \frac{a}{\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})}$$

besitzt; es ergiebt sich dann für den von $r = a$ aus gerechneten Bogen

$$s = a\sqrt{2} \,.\, arccos\frac{r}{a}.$$

Die gesamte, vom Äquator bis zu den Polen reichende sphärische Spirale hat demnach die endliche Länge $\pi\sqrt{2} \,.\, a$.

20. Die beiden Flächen

$$cx = z(b + z), \quad c^2(x^2 + y^2) = b^2 z^2,$$

deren erste ein parabolischer Cylinder, und deren zweite ein Rotationskegel ist, schneiden sich in einer Kurve, von der die Horizontalprojektion durch die Gleichung

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{b^2}{c}x\right)^2 = \frac{b^4}{c^2}(x^2 + y^2)$$

dargestellt wird, also eine über dem Durchmesser $2a = \frac{b^2}{c}$ konstruierte Kardioide bildet. Führt man θ als unabhängige Variable ein, so hat man die Gleichungen

$$r = \frac{b^2}{c}(1 + \cos\theta), \quad z = b(1 + \cos\theta),$$

aus denen sich ergiebt

$$s = \int_0^\theta \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta} \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\theta \, d\theta$$

oder, wenn die Integration ausgeführt wird,

$$s = \frac{2b}{c}\left\{\sin \tfrac{1}{2}\theta \,.\, \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta} + \frac{b^2}{c}\, l\left(\frac{c \sin \tfrac{1}{2}\theta + \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}}{b}\right)\right\}.$$

Die Gesamtlänge der geschlossenen Durchschnittslinie ist hier nach leicht zu finden.

Kapitel III.

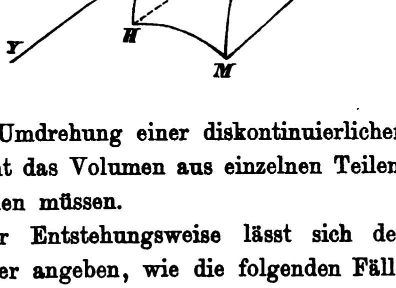
Kubaturen und Komplanationen.

§ 17.

Die Kubatur begrenzter Volumina.

Allgemeine Regeln und Formeln. In einem irgendwie durch Flächen begrenzten, längs der x-Achse sich erstreckenden Körper mögen zwei, zur genannten Achse senkrechte Querschnitte GHJ und LMN (Fig. 28) gelegt sein, von denen der erste als fest, der zweite als beweglich gelten und von der yz-Ebene um $OL = x$ entfernt sein soll; bezeichnet nun U_x den Flächeninhalt des beweglichen Querschnittes, V_x das Volumen der zwischen beiden Querschnitten enthaltenen Zone, so gilt die allgemeine Formel

Fig. 28.



$$V_x = \int_{x_0}^{x} U_x \, dx,$$

wobei $x_0 = OG$. Falls die Begrenzungsflächen des Körpers Unterbrechungen haben (wie z.B. eine Rotationsfläche, die durch Umdrehung einer diskontinuierlichen Kurve entstanden ist), so besteht das Volumen aus einzelnen Teilen, welche gesondert berechnet werden müssen.

Bei Flächen von spezieller Entstehungsweise lässt sich der Wert von U_x in der Regel näher angeben, wie die folgenden Fälle zeigen werden.

a) In der Horizontalebene xy (Fig. 29, S. 132) sei eine durch ihre Gleichung zwischen $OL = x$ und $LM = y$ bestimmte Kurve konstruiert und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade MN gelegt,

welche der yz-Ebene parallel ist und mit der Horizontalebene den konstanten Neigungswinkel $LMN = \gamma$ bildet; die Begrenzungsfläche ist dann eine Cylinderfläche und

$$V_x = \frac{1}{2} \tan\gamma \int_{x_0}^{x} y^2 dx.$$

b) Wie vorhin sei in der xy-Ebene eine Kurve HM, dagegen in der xz-Ebene irgend eine andere Kurve JN gezogen, deren Gleichung zwischen $OL = x$ und $LN = z$ gegeben ist; jede zu yz

Fig. 29.

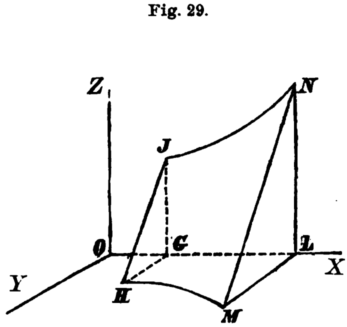
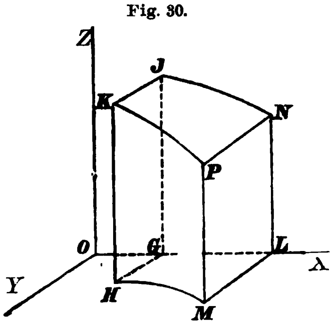


Fig. 30.



parallele Ebene, wie z. B. LMN, schneidet beide Kurven, und wenn die Durchschnittspunkte durch gerade Linien MN verbunden werden, so entsteht eine windschiefe Regelfläche; in diesem Falle ist

$$V_x = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} yz\, dx.$$

c) Wie vorhin mögen die beiden Kurven HM und JN gegeben sein; durch alle Punkte der ersten legt man Parallelen zur z-Achse (Fig. 30), durch alle Punkte der zweiten Parallelen zur x-Achse; die Begrenzung des Körpers besteht dann (abgesehen von Ebenen) aus zwei sich schneidenden Cylinderflächen, und es ist

$$V_x = \int_{x_0}^{x} yz\, dx.$$

d) Wenn eine in der xy-Ebene konstruierte Kurve HM (s. Fig. 28) um die x-Achse gedreht wird, so entseht eine Rotationsfläche, und es ist der ganze Querschnitt $U_x = \pi y^2$, mithin

$$V_x = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx.$$

e) Sind HM und JN zwei beliebige Kurven und wird in jeder zu yz parallelen Ebene LMN eine Ellipse aus den Halbachsen LM

und LN konstruiert, so entsteht eine Fläche mit elliptischen Querschnitten; es ist dann

$$V_x = \pi \int_{x_0}^{x} y z \, dx.$$

f) Wie vorhin mögen HM und JN zwei beliebige Kurven sein; durch alle Punkte der ersten legt man Parallelen zur z-Achse, die zweite Kurve lässt man um die x-Achse rotieren; die Begrenzung der Zone (Fig. 31) besteht dann (abgesehen von Ebenen) aus einer

Fig. 31.

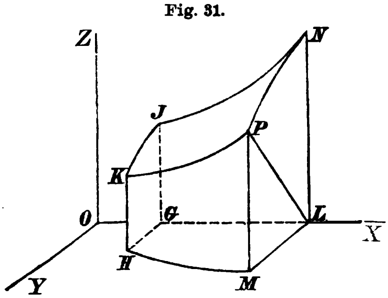
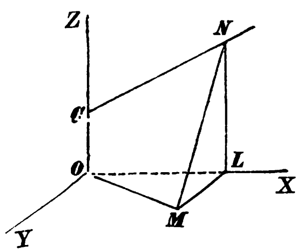


Fig. 32.



Cylinderfläche und einer Umdrehungsfläche. Der Querschnitt U_x ist hier die Summe von der Dreiecksfläche LMP und der Kreissektorenfläche NLP, daher

$$V_x = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \left(y \sqrt{z^2 - y^2} + z^2 \arcsin \frac{y}{z} \right) dx.$$

Im allgemeinen sei noch bemerkt, dass die Volumina von Hohlkörpern als Differenzen zweier Volumina zu berechnen sind.

Beispiele. 1. Ein elliptischer Cylinder schneidet die xy-Ebene in einer Ellipse mit den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, und die xz-Ebene in einer Ellipse mit den Halbachsen $OA = a$, $OC = c$; seine erzeugenden Geraden sind parallel zu BC. Das Volumen zwischen den Querschnitten OBC, U_x, den Koordinatenebenen und der Fläche beträgt

$$V_x = \tfrac{1}{2} b c x \left(1 - \frac{x^2}{3 a^2} \right),$$

mithin ist das Volumen $OABC = \tfrac{1}{3} abc$.

2. In der Horizontalebene xy ist eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade OM, in der Vertikalebene xz eine nicht durch O gehende Gerade CN konstruiert (Fig. 32), und es mögen

wie in b) die Punkte M und N durch gerade Linien verbunden sein, die der yz-Ebene parallel sind und bekanntlich ein **hyperbolisches Paraboloid** erzeugen. Sind bei positiven β, γ, c

$$y = \beta x, \quad z = c + \gamma x$$

die Gleichungen der Geraden OM und CN, so ergiebt sich für das Volumen $OLMNCO$

$$V_x = \tfrac{1}{2}\beta x^2(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{3}\gamma x).$$

Die Fläche des Querschnittes LMN heisse U, die Fläche des durch

Fig. 33.

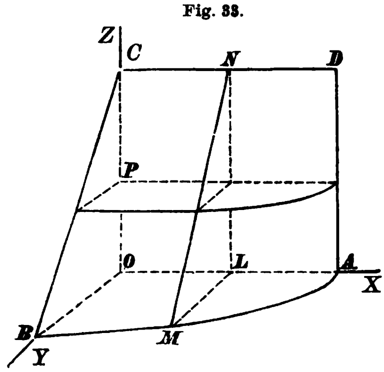
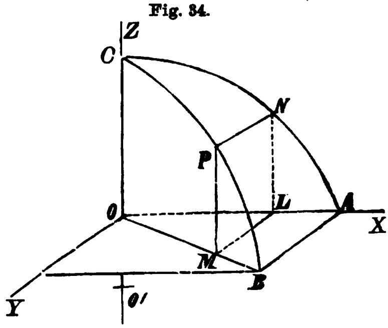


Fig. 34.



die Mitte von OL gelegten parallelen Querschnittes sei T; es gilt dann die einfache Beziehung

$$V = \tfrac{1}{6}(4T + U)x.$$

3. Die Horizontalspur einer Fläche sei eine aus den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$ konstruierte Ellipse (Fig. 33), die Vertikalspur eine in der Entfernung $OC = c$ parallel zu OA liegende Gerade CD; die Querschnitte der Fläche mögen gerade Linien sein, welche eine sogenannte **elliptische Keilfläche** bilden. Das Volumen zwischen OBC und LMN ist

$$V_x = \frac{bc}{4}\left(\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \,.\, arcsin \frac{x}{a}\right).$$

Der ganze Körper, dessen Grundriss eine Ellipse, dessen Aufriss ein Rechteck, und dessen Seitenansicht ein Dreieck ist, besitzt hiernach das halbe Volumen des umschriebenen elliptischen Cylinders.

Will man dagegen das Volumen V_z einer Zone bestimmen, die zwischen der Basis und einem in der Entfernung $OP = z$ hierzu parallelen Querschnitte enthalten ist, so beachte man, dass der volle Querschnitt eine Ellipse bildet; daraus findet sich

$$V_z = \pi a b z\left(1 - \frac{z}{2c}\right),$$

und für $z = c$ derselbe Wert wie vorhin.

4. In der xy-Ebene ist ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten $OA = a$, $AB = b$ konstruiert (Fig. 34), in der xz-Ebene ein Kreisbogen, der durch A, sowie durch einen auf der z-Achse in der Höhe $OC = c$ befindlichen Punkt C geht, und dessen Mittelpunkt O' auf der Verlängerung von CO liegt; man verlangt das Volumen des dreiseitigen Prismas über OAB, welches oberhalb durch den Cylinder begrenzt wird, dessen erzeugende Geraden parallel zur y-Achse durch den Kreisbogen AC gehen. Nennt man für den Augenblick r den Radius des Kreises, so ist

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - a^2}, \quad r = \frac{a^2 + c^2}{2c},$$

mithin

$$V_x = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{3}\sqrt{(r^2 - x^2)^3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - a^2}\,.\,x^2\right\};$$

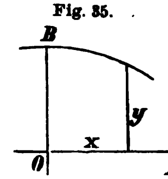
für $x = a$ und durch Wegschaffung von r erhält man als Volumen des Körpers, der als Inhalt eines Klostergewölbes mit kreisförmiger Wölblinie bezeichnet werden kann,

$$V_a = \frac{bc(3a^2 + c^2)}{12a}.$$

5. Wenn in der vorigen Aufgabe statt des Kreises eine aus den Halbachsen $OA = a$ und $OC = c$ konstruierte Ellipse genommen wird, so ergiebt sich als Volumen des elliptischen Klostergewölbes

$$V_a = \tfrac{1}{3}abc.$$

Fig. 35.



6. Eine Parabel, deren Scheitel B ist, sei um eine Gerade OA gedreht, die in der Entfernung $BO = b$ senkrecht zur Parabelachse liegt und die Kurve schneidet (Fig. 35); die Gleichung der Parabel ist, wenn k deren Parameter bezeichnet,

$$y = b - \frac{x^2}{k},$$

mithin das Volumen einer von $x = 0$ ab gerechneten Zone des Rotationskörpers

$$V_x = \pi x\left(b^2 - \frac{2bx^2}{3k} + \frac{x^4}{5k^2}\right).$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}h$, bezeichnet mit c die zugehörige Parabelordinate und drückt k durch b, c, h aus, so liefert das Doppelte des vorigen Wertes, nämlich

$$\tfrac{1}{15}\pi h(8b^2 + 4bc + 3c^2)$$

den Inhalt eines Fasses von parabolischer Krümmung, dessen grösster Durchmesser $2b$, dessen kleinster $2c$ und dessen Höhe h ist.

7. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel eine Ellipse treten, deren kleine Halbachse $OB = b$ ist, so erhält man als Inhalt des Fasses von elliptischer Krümmung

$$\tfrac{1}{3}\pi h(2b^2 + c^2).$$

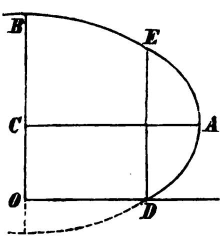
Derselbe ist um

$$\tfrac{2}{15}\pi h(b - c)^2$$

grösser als der vorige Inhalt.

8. Eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse sei um eine Gerade gedreht worden, die der grossen Halbachse parallel liegt in der Entfernung c; die Kubatur des entstandenen Rotationskörpers verlangt dann die Unterscheidung dreier Fälle.

Fig. 36.



Für $c > b$ ist der Körper ein elliptischer Ring, dessen Querschnitte sämtlich Kreisringe sind; als Volumen einer von $x = 0$ an gerechneten Zone ergiebt sich

$$2\pi bc\left(\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \,.\, \arcsin \frac{x}{a}\right),$$

und als Volumen des ganzen Ringes $2\pi^2 abc$.

Im Falle $c < b$ wird die Ellipse von der Drehungsachse in einem Punkte D geschnitten (Fig. 36) und die Querschnitte des Rotationskörpers sind Vollkreise für $x \leq OD$, dagegen Kreisringe für $x > OD$. Setzt man zuerst $x < OD$ voraus, so erhält man, von $x = 0$ ab gerechnet,

$$V_x = \pi\left[(b^2 + c^2)x - \frac{b^2x^3}{3a^2} + \frac{bcx}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + abc \,.\, \arcsin \frac{x}{a}\right];$$

für $x = OD$ ergiebt sich hieraus als Volumen des von der Fläche $BODEB$ erzeugten Rotationskörpers

$$\pi\left\{\frac{a(2b^2 + 7c^2)}{3b}\sqrt{b^2 - c^2} + abc \,.\, \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}\right\}.$$

Nimmt man zweitens $x > OD$ und bestimmt das ringförmige Volumen R_x so, dass es für $x = OD$ verschwindet, so findet man

$$R_x = 2\pi\left\{\frac{bcx}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{ac^2\sqrt{b^2-c^2}}{b}\right\}$$
$$+ 2\pi abc\left\{\arcsin\frac{x}{a} - \arcsin\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}\right\};$$

für $x = a$ folgt hieraus das Volumen des von dem Segmente $EDAE$ beschriebenen Ringes

$$\pi^2 abc - 2\pi ac\left\{\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{b} + b\,.\arcsin\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}\right\}.$$

Das Doppelte von der Summe der beiden Volumina giebt den Inhalt des ganzen elliptischen Wulstes, nämlich

$$W = 2\pi a\{bc(\pi - \alpha) + \tfrac{1}{3}(2b^2 + c^2)\sin\alpha\},$$

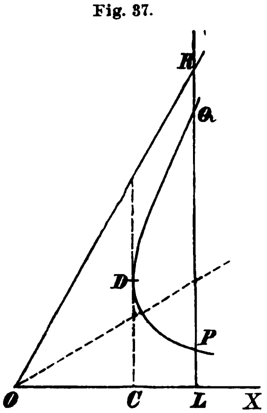
wobei der Hilfswinkel α durch die Formel

$$\cos\alpha = \frac{c}{b}$$

bestimmt ist.

Im dritten Falle $c = b$ ist das Volumen $= 2\pi^2 ab^2$.

Fig. 37.



9. Eine Hyperbel, deren Halbachse a grösser als die Nebenhalbachse b sein möge, wird um eine ihrer Asymptoten gedreht (Fig. 37); man sucht das Volumen des von dem Hyperbelsegmente $PDQP$ beschriebenen ringförmigen Körpers.

Nimmt man die Drehungsachse zur x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so erhält man die Gleichung der Kurve

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2ab\,xy + a^2b^2 = 0,$$

woraus zwei Werte für y folgen, welche die Ordinaten LP und LQ bestimmen; nur der Abscisse $OC = \sqrt{a^2 - b^2}$ entspricht eine einzige Ordinate CD, die zugleich Tangente ist. Unter Rücksicht auf den Umstand, dass die Querschnitte des gesuchten Volumens Kreisringe sind, findet man

$$V_x = \frac{4\pi a^2 b^2}{3c^4}\sqrt{(x^2-c^2)^3}, \quad c = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Verlängert man LPQ bis zum Durchschnitte R mit der zweiten Asymptote, so ergiebt sich als Volumen des von der Fläche $OLPDQRO$ beschriebenen Rotationskörpers

$$\frac{4\pi a^2 b^2}{3c^4}\left\{x^3 - \sqrt{(x^2-c^2)^3}\right\}.$$

Bei grossen x beträgt dasselbe nahezu das Doppelte des Kreiscylinders, der OL zur Höhe und CD zum Radius hat.

10. Die in Tl. I, S. 94, Nr. 7 erwähnte Kurve liefert durch Umdrehung um die x-Achse eine Fläche, für die, von $x = 0$ an gerechnet,

$$V_x = \frac{\pi x^2}{9a}\left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2ax + \tfrac{9}{2}a^2\right)$$

ist, woraus sich als Volumen des von der Kurvenschlinge erzeugten Rotationskörpers $\frac{39}{4}\pi a^3$ ergiebt.

11. Für die in Tl. I, S. 94, Nr. 8 betrachtete schleifenförmige Kurve ist, wenn V_x von $x = 0$ ab gerechnet wird,

$$V_x = \frac{\pi(5a^2 - 3x^2)x^3}{15a^2};$$

das Gesamtvolumen des Rotationskörpers beträgt hiernach ein Fünftel von dem Volumen der umschriebenen Kugel.

12. Verlegt man in der Tl. I, S. 95, Nr. 9 betrachteten Kurve den Koordinatenanfang nach der Spitze A, so ist das von $x = 0$ an gerechnete Volumen des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung der Kurvenfläche um die x-Achse entsteht,

$$V_x = \frac{\pi(5a - 2x)x^4}{10a^2}$$

mithin das Gesamtvolumen $= \frac{8}{5}\pi a^3$.

13. Durch Umdrehung der Cissoide um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche, in der, von $x = 0$ an gerechnet,

$$V_x = \pi\left\{8a^3 l\left(\frac{2a}{2a - x}\right) - x\left(4a^2 + ax + \tfrac{1}{3}x^2\right)\right\}$$

ist. Spezieller für $x = a$ wird

$$V_a = 8\pi\left(l2 - \tfrac{2}{3}\right)a^3.$$

Lässt man die Cissoide um ihre Asymptote rotieren, so ist der in der Höhe y senkrecht zur Drehungsachse gelegte Flächenschnitt ein Kreis mit dem Radius $2a - x$, daher

$$V_y = \pi \int_0^y (2ax - x^2)\, dy = \pi \int_0^x (3a - x)\sqrt{2ax - x^2}\,.\, dx,$$

$$= \pi \left\{ a^3 \arccos \frac{a - x}{a} - \frac{3a^2 - 5ax + x^2}{3} \sqrt{2ax - x^2} \right\}.$$

Als Inhalt des von der ganzen Cissoide durch Umdrehung um ihre Asymptote entstandenen Rotationskörpers folgt hieraus der endliche Wert $2\pi^2 a^3$.

14. Wenn die in Tl. I, S. 98, Nr. 12 betrachtete Kurve (Astroide) um die x-Achse gedreht wird, so ist von $x = 0$ an gerechnet:

$$V_x = \pi \int_0^x \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx;$$

mittels $x = a\xi^3$ erhält man,

$$V_x = 3\pi x\left(\tfrac{1}{3} a^2 - \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{a^4 x^2} + \tfrac{3}{7}\sqrt[3]{a^2 x^4} - \tfrac{1}{9} x^2\right),$$

und als Gesamtvolumen $\frac{8}{35}$ vom Volumen der umschriebenen Kugel.

Dasselbe Verfahren passt auch auf den Fall, wo man die Evolute der Ellipse um die eine oder andere Halbachse der Ellipse rotieren lässt.

15. Nimmt man in der Kardioide den Mittelpunkt C des erzeugenden Kreises zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen positive x in der Richtung von C nach A gezählt werden, so ist

$$y^2 = 3a^2 - x^2 \pm 2a\sqrt{3a^2 - 2ax},$$

wobei von $x = -3a$ bis $x = +a$ nur das obere Zeichen gilt, und von $x = +a$ bis $x = +\frac{3}{2}a$ beide Zeichen Geltung haben. Durch Umdrehung der Kurve um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche, deren Querschnitte teils Kreise, teils Kreisringe sind. Für den ersten Teil des eingeschlossenen Raumes wird für $x_0 = -3a$

$$V_x = \pi\left[18a^3 + 3a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{2}{3}\sqrt{(3a^2 - 2ax)^3}\right],$$

woraus für $x = a$ der Wert $20\pi a^3$ folgt. Im zweiten ringförmigen Teile des Rotationskörpers lasse man V_x mit $x_0 = a$ beginnen; dies giebt

$$V_x = \tfrac{4}{3}\pi[a^3 - \sqrt{(3a^2 - 2ax)^3}],$$

und als Volumen des ganzen ringförmigen Teiles $\frac{4}{3}\pi a^3$. Der gesamte Inhalt des von der Kardioidenfläche erzeugten Rotationskörpers beträgt hiernach das Sechzehnfache von dem Volumen der Kugel mit dem Radius a.

16. Die Fusspunktkurve der Ellipse hat zur Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

oder wenn $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ gesetzt wird,

$$y^2 = \tfrac{1}{2}\{b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}\},$$

wobei die Wurzel nur positiv zu nehmen ist. Lässt man die Kurve um die x-Achse rotieren, so folgt für $x_0 = 0$,

$$V_x = \tfrac{1}{2}\pi\left\{b^2x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x\sqrt{b^4 + 4c^2x^2} + \frac{b^4}{4c}\,l\left(\frac{2cx + \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}}{b^2}\right)\right\};$$

das Gesamtvolumen des Rotationskörpers ist hiernach

$$\pi\left\{\frac{a(2a^2 + 3b^2)}{6} + \frac{b^4}{2c}\,l\left(\frac{a + c}{b}\right)\right\}.$$

17. Aus der Gleichung der Cassinischen Kurve (Tl. I, S. 103, Nr. 18) ergiebt sich

$$y^2 = \sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - (c^2 + x^2),$$

wobei das Wurzelzeichen nur positiv genommen werden darf. Man lässt die Kurve um die x-Achse rotieren.

Für $h < c$ erstreckt sich die Kurve auf der positiven Seite von $x = \sqrt{c^2 - h^2}$ bis $x = \sqrt{c^2 + h^2}$, man bestimmt daher $x_0 = \sqrt{c^2 - h^2}$; dies giebt

$$V_x = \pi\{\tfrac{1}{6}(2c^2 + h^2)\sqrt{c^2 - h^2} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - c^2x - \tfrac{1}{3}x^3\}$$
$$+ \frac{\pi h^4}{4c}\,l\left(\frac{2cx + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}}{(c + \sqrt{c^2 - h^2})^2}\right)$$

und als Gesamtvolumen

$$\pi\left\{\frac{h^4}{c}\,l\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + h^2}}{c + \sqrt{c^2 - h^2}}\right) - \tfrac{1}{6}(\sqrt{c^2 + h^2} - \sqrt{c^2 - h^2})^3\right\}.$$

Im Falle $h = c$ wird die Kurve zu einer Lemniskate; die vorigen Formeln sind dann noch anwendbar.

Ist endlich $h > c$, so rechne man das Volumen von $x_0 = 0$ ab; dies giebt

$$V_x = \pi \left\{ \tfrac{1}{2} x \sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - c^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 + \frac{h^4}{4c} l \left(\frac{2cx + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}}{h^2} \right) \right\}$$

und als Gesamtvolumen

$$\pi \left\{ \frac{h^4}{c} l \left(\frac{c + \sqrt{c^2 + h^2}}{h} \right) + \tfrac{1}{3}(h^2 - 2c^2)\sqrt{c^2 + h^2} \right\}.$$

18. Lässt man eine logarithmische Linie um die x-Achse rotieren, so ist das Volumen einer Zone, welche von der Fläche und zwei Kreisen begrenzt wird, deren Radien die Ordinaten y_0 und y sind,

$$V_x = \tfrac{1}{2} \pi a (y^2 - y_0^2);$$

das von $x_0 = -\infty$, $y_0 = 0$ bis $x = 0$, $y = b$ sich erstreckende Volumen hat demnach den endlichen Inhalt $\frac{1}{2} \pi a b^2$.

Nimmt man dagegen die y-Achse zur Drehungsachse, so folgt

$$V_y = \pi \int_{y_0}^{y} x^2 dy = \frac{\pi b}{a} \int_{x_0}^{x} x^2 e^{\frac{x}{a}} dx,$$

das ist, wenn das Volumen von $x_0 = 0$ ab gerechnet wird,

$$V_y = \pi (2a^2 - 2ax + x^2) y;$$

das von $y_0 = 0$ bis $y = b$ reichende Volumen besitzt hiernach den endlichen Inhalt $2 \pi a^2 b$.

19. Eine Kettenlinie werde um die x-Achse gedreht, das Volumen von $x_0 = 0$ ab gerechnet und der rotierende Bogen mit s bezeichnet; es ist dann

$$V_x = \tfrac{1}{2} \pi a (ax + ys).$$

Lässt man die Kurve um die y-Achse rotieren, so wird, von $y_0 = a$ ab gerechnet,

$$V_y = \pi \{ (2a^2 + x^2) y - 2a(a^2 + xs) \}.$$

20. Die logarithmische Lemniskate (Tl. I, S. 110, Nr. 5) werde um die x-Achse gedreht und das Volumen von $x_0 = 0$ an gerechnet; es ist dann

$$V_x = \tfrac{2}{3} \pi x^3 \left\{ l \left(\frac{a}{x} \right) + \tfrac{1}{3} \right\},$$

mithin das Gesamtvolumen des Rotationskörpers gleich einem Sechstel der umschriebenen Kugel.

21. Handelt es sich um die Kubatur des Rotationskörpers, den die Fläche der Traktorie einer Geraden (Tl. I, S. 111, Nr. 6) bei ihrer Umdrehung um die x-Achse erzeugt, so muss man entweder die Formel

$$V_x = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx$$

durch die folgende

$$V_x = \pi \left\{ y^2 x - 2 \int_{y_0}^{y} xy \, dy \right\}$$

ersetzen und hierin für x seinen Wert substituieren, oder x und y durch eine dritte Variable ausdrücken. Um das letztere zu thun, sei bei positiven x

$$x = a \left\{ l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right) - \sin\varphi \right\}, \quad y = a \cos\varphi,$$

so dass x von 0 bis ∞ wächst und y von a bis 0 abnimmt, wenn φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ geht. Für das von $x_0 = 0$ ab gerechnete Volumen ergiebt sich dann

$$V_x = \tfrac{1}{3}\pi a^3 \sin^3\varphi = \tfrac{1}{3}\pi \sqrt{(a^2 - y^2)^3};$$

das gesamte Volumen des Rotationskörpers ist die Hälfte von dem Volumen einer mit dem Radius a beschriebenen Kugel.

22. Drückt man bei der Cykloide (Tl. I, S. 116, Nr. 14) x und y durch den Wälzungswinkel ω aus und rechnet das Volumen von $x_0 = 0$, d. h. $\omega = 0$ an, so erhält man

$$V_x = \pi b^3 \left(\tfrac{5}{2}\omega - 4 \sin\omega + \tfrac{3}{2} \sin\omega \cos\omega + \tfrac{1}{3} \sin^3\omega\right),$$

und als Volumen des von einer ganzen Cykloidenfläche erzeugten Rotationskörpers $5\pi^2 b^3$.

23. In der Ebene xz ist die durch die Gleichung

$$z = \sqrt{2cx}$$

bestimmte Parabel konstruiert und um die x-Achse gedreht worden, so dass ein Rotationsparaboloid entsteht. Diese Fläche wird von einem parabolischen Cylinder geschnitten, dessen erzeugende Geraden parallel zur z-Achse liegen, und dessen Horizontalspur die Gleichung

$$y = \sqrt{2bx}, \quad b \leqq c$$

besitzt; man sucht das Volumen, das von der Horizontalebene, der Vertikalebene, dem am Ende des x normal zur x-Achse gelegten Schnitte und im übrigen von den beiden erwähnten Flächen begrenzt wird.

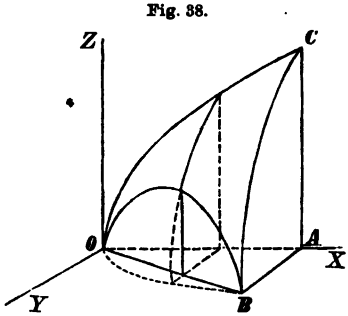
Nach der auf S. 133 unter f) entwickelten Formel erhält man

$$V_x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{b(c-b)} + c \,.\, arcsin\sqrt{\frac{b}{c}}\right\} x^2.$$

Im speziellen Falle $b = c$ wird V_x zur Viertelkappe eines Rotationsparaboloids; die ganze Kappe ist hiernach gleich der Hälfte des umschriebenen Cylinders.

24. In dem vorigen Rotationsparaboloide sei am Ende der Strecke $OA = a$ ein normaler Querschnitt ABC (Fig. 38) und durch die Gerade OB eine auf der xy-Ebene senkrechte Ebene gelegt; man sucht das Volumen, das von den Ebenen OAB, OAC, ABC, der genannten Vertikalebene und im übrigen von der Fläche begrenzt wird.

Fig. 38.



Als Gleichung der Geraden OB hat man

$$y = \sqrt{\frac{2c}{a}} \cdot x,$$

mithin für den Querschnitt am Ende des x

$$U_x = c\left\{\frac{x\sqrt{ax - x^2}}{a} + x \,.\, arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right\};$$

hieraus findet sich durch partielle Integration

$$V_x = c\left\{\frac{8x^2 - a^2}{16}\, arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{16x^2 + 2ax + 3a^2}{48a}\sqrt{x(a-x)}\right\},$$

und für das gesuchte Volumen

$$V_a = \tfrac{7}{32}\pi a^2 c.$$

25. Das vorige Rotationsparaboloid werde von einem elliptischen Cylinder geschnitten, dessen erzeugende Geraden parallel zur z-Achse liegen, und dessen Horizontalspur durch die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{c}{a}(2ax - x^2)}$$

bestimmt, also eine Ellipse ist, die $2a$ zur grossen Achse und im Scheitel O dieselbe Krümmung hat wie die Horizontalspur des Paraboloids.

Für den Querschnitt am Ende des x ergiebt sich

$$U_x = c\left\{\frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{2a} + x \, . \, arcsin \sqrt{\frac{2a - x}{2a}}\right\},$$

wobei man bemerken möge, dass zufolge des bekannten Verhältnisses zwischen Centriwinkel und Peripheriewinkel über demselben Bogen die Gleichung

$$arcsin \sqrt{\frac{2a - x}{2a}} = \tfrac{1}{2}\left(\pi - arccos \frac{a - x}{a}\right)$$

stattfindet. Man erhält nun

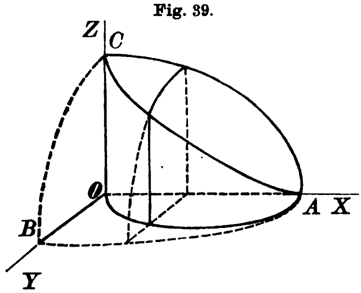
$$V_x = c\left\{\frac{\pi}{4} x^2 + \frac{5a^2 - 2x^2}{8} arccos \frac{a - x}{a} - \frac{15a^2 + 5ax - 4x^2}{24a}\sqrt{x(2a - x)}\right\},$$

und für das gesuchte Volumen

$$V_{2a} = \tfrac{5}{8}\pi a^2 c.$$

26. In der xz-Ebene sei eine durch die Gleichung

Fig. 39.



$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

bestimmte Ellipse konstruiert und um die x-Achse gedreht worden. Das entstandene Rotationsellipsoid werde von einem elliptischen Cylinder geschnitten, dessen erzeugende Geraden parallel zur z-Achse liegen und dessen Horizontalspur durch die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad b < c$$

gegeben ist. Für das von $x_0 = 0$ an gerechnete Volumen erhält man

$$V_x = \tfrac{1}{2}\left(b\sqrt{c^2 - b^2} + c^2 arcsin \frac{b}{c}\right)\left(x - \frac{x^2}{3a}\right),$$

und für $x = a$

$$V_a = \tfrac{1}{3} a\left(b\sqrt{c^2 - b^2} + c^2 arcsin \frac{b}{c}\right).$$

27. Das vorige Rotationsellipsoid werde von einem vertikalen elliptischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Halbachsen $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}c$ besitzt und ihre Hauptscheitel in O und A hat (Fig. 39). Es ist dann

$$U_x = \frac{c^2}{2a^2}\left\{(a-x)\sqrt{ax} + (a^2-x^2)\, arctan \sqrt{\frac{x}{a}}\right\},$$

$$V_x = \frac{c^2}{18a}\left\{\frac{3(2a^3+3a^2x-x^3)}{a}\, arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - (6a^2-5ax+3x^2)\sqrt{\frac{x}{a}}\right\},$$

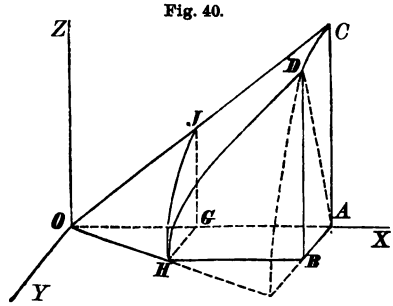
und speziell

$$V_a = \left(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9}\right)ac^2.$$

Nach Abzug dieses Volumens bleibt von dem Oktanten des Ellipsoids ein Rest, der einen rationalen Teil des Parallelepipeds aus den Kanten a, c, c beträgt.

28. Ein in der xz-Ebene aus den Katheten $OA = a$, $AC = c$ konstruiertes rechtwinkliges Dreieck ist um die erste Kathete gedreht und dadurch ein Rotationskegel erzeugt worden; letzteren schneidet eine in der Entfernung $AB = b$ parallel zu xz gelegte Ebene, und es wird nun das Volumen gesucht, welches von den Ebenen OAB, OAC, ABC, BHD und der Kegelfläche begrenzt wird (Fig. 40).

Fig. 40.



Setzt man für den Augenblick die Strecke

$$OG = \frac{ab}{c} = k,$$

so ist

$$U_x = \frac{b}{2}\left\{\frac{c\sqrt{x^2-k^2}}{a} + \frac{b}{k^2}x^2 \arcsin\frac{k}{x}\right\};$$

durch Integration ergiebt sich hieraus das von dem Querschnitte GHJ an gerechnete Volumen und speziell für $x = a$

$$V_a = \tfrac{1}{3}ab\sqrt{c^2-b^2} - \tfrac{1}{12}\pi\frac{ab^3}{c}$$
$$+ \tfrac{1}{6}ac^2 \arcsin\frac{b}{c} + \tfrac{1}{6}\frac{ab^3}{c}\, l\left(\frac{b}{c+\sqrt{c^2-b^2}}\right).$$

Addiert man das Volumen $OGHJ$ und bezeichnet den Winkel CAD mit ε, so folgt

$$V = \tfrac{1}{6}ac^2(\varepsilon + \sin 2\varepsilon + \sin^2\varepsilon \,.\, l \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Dieselbe Aufgabe lässt sich auch dadurch lösen, dass man in der beliebigen Entfernung $AM = y$ (Fig. 41) einen Schnitt MNP parallel zur Ebene xz legt, dessen Flächeninhalt U_y und daraus das Volumen $OAMNPCAO$ berechnet. Der Schnitt ist eine mit den Halbachsen $\frac{ay}{c}$ und y versehene Hyperbel, deren höchster Punkt P die Koordinaten a und $\sqrt{c^2 - y^2}$ besitzt; es ist daher

$$U_y = \tfrac{1}{2}\left\{a\sqrt{c^2 - y^2} - \frac{ay^2}{c}\, l\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right)\right.,$$

mithin durch Integration

$$V_y = \tfrac{1}{6}\, a\left\{2y\sqrt{c^2 - y^2} + c^2 \arcsin\frac{y}{c} - \frac{y^3}{c}\, l\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right)\right\},$$

woraus sich für $y = b$ derselbe Wert wie vorhin ergiebt.

Fig. 41.

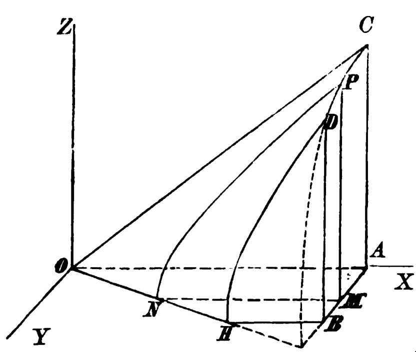
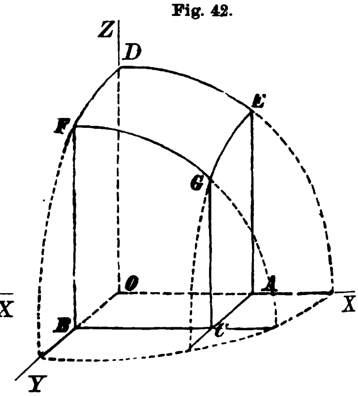


Fig. 42.



29. Eine aus dem Koordinatenanfange mit dem Radius $OD = c$ beschriebene Kugelfläche bildet die obere Begrenzungsfläche eines vertikal stehenden rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Basis die Seiten $OA = a$ und $OB = b$ besitzt (Fig. 42); man sucht das Volumen dieses Körpers, welches als Inhalt von dem vierten Teile eines Kugelgewölbes anzusehen ist.

Der Flächeninhalt des Querschnitts am Ende des x beträgt

$$U_x = \tfrac{1}{2}\left\{b\sqrt{c^2 - b^2 - x^2} + (c^2 - x^2)\arcsin\frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\right\};$$

setzt man nach geschehener Integration $x = a$ und führt die Hilfswinkel α, β, γ mittels der Formeln ein

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\sin\gamma = \frac{ab}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} = \sin\alpha \sin\beta,$$

so erhält man

$$V = \tfrac{1}{3} ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} + \tfrac{1}{6} a(3c^2 - a^2)\alpha + \tfrac{1}{6} b(3c^2 - b^2)\beta - \tfrac{1}{2} c^3\gamma.$$

In dem speziellen Falle $OC = OD$ wird einfacher

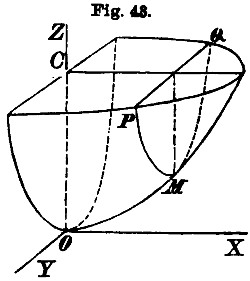
$$V_a = \tfrac{1}{12}\pi\{a^3 + b^3 + (a+b)^3 - 2\sqrt{(a^2+b^2)^3}\}.$$

30. Ein elliptisches Paraboloid, dessen Gleichung

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

sein möge, wird von zwei Ebenen geschnitten, deren erste in der Entfernung $OL = x$ parallel zur yz-Ebene, und deren zweite in der Entfernung $OC = c$ parallel zur xy-Ebene liegt (Fig. 43); man sucht das zwischen der Fläche der yz-Ebene und den beiden genannten Ebenen enthaltene Volumen.

Fig. 43.



Der parabolische Querschnitt PMQ hat die Fläche

$$U_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{b(2ac - x^2)^3}{a^3}},$$

und hieraus findet sich

$$V_x = \sqrt{ab}\left\{c^2 \arcsin\frac{x}{\sqrt{2ac}} + \frac{x(5ac - x^2)}{6a^2}\sqrt{2ac - x^2}\right\}.$$

Für $x = \sqrt{2ac}$ wird hieraus das Volumen der halben Kappe von der Höhe c.

31. Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades, nämlich

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

gestattet folgende leicht zu übersehende Vereinfachungen. Nimmt man einen Punkt der Fläche zum Koordinatenanfang, so ist $K = 0$; setzt man ferner voraus, dass die xy-Ebene und die Fläche einander im Koordinatenanfange berühren, so muss gleichzeitig $G = 0$

und $H = 0$ sein; endlich lässt sich durch passende Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse noch das Produkt Fxy wegschaffen, mithin bleibt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Jz = 0.$$

Es soll nun das Volumen V einer Zone berechnet werden, deren Begrenzungsebenen in den Entfernungen z_0 und z_1 parallel zur xy-Ebene liegen, wobei die Schnitte der Fläche mit den genannten Ebenen als Ellipsen vorausgesetzt werden.

Der Schnitt der Fläche mit einer in der Entfernung h parallel zur xy-Ebene gelegten Ebene hat zur Gleichung

$$A\left(x + \frac{Eh}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{Dh}{B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BE^2 - ABC}{AB} h^2 - 2Jh,$$

und wenn dieser Schnitt eine Ellipse ist, so beträgt seine Fläche

$$U_h = \frac{\pi}{\sqrt{AB}}\left\{\frac{AD^2 + BE^2 - ABC}{AB} h^2 - 2Jh\right\},$$

wofür kurz geschrieben werden möge

$$U_h = \gamma h^2 + \beta h.$$

Hiernach ist

$$V_z = \int_{z_0}^{z_1} (\beta z + \gamma z^2)\, dz,$$

mithin das gesuchte Volumen

$$V = (z_1 - z_0)\left\{\tfrac{1}{2}\beta(z_0 + z_1) + \tfrac{1}{3}\gamma(z_0^2 + z_0 z_1 + z_1^2)\right\}.$$

Bei dem elliptischen Paraboloide ist $\gamma = 0$, mithin

$$V = \tfrac{1}{2}(z_1 - z_0)(\beta z_0 + \beta z_1)$$

oder, wenn man mit Q_0 und Q_1 die begrenzenden Querschnitte der Zone bezeichnet,

$$V = \tfrac{1}{2}(z_1 - z_0)(Q_0 + Q_1).$$

Bei den zentrischen Flächen sind die begrenzenden Querschnitte

$$Q_0 = \beta z_0 + \gamma z_0^2, \quad Q_1 = \beta z_1 + \gamma z_1^2,$$

und der mittlere, in der Entfernung $\frac{1}{2}(z_0 + z_1)$ liegende Querschnitt, der M heissen möge, ist

$$M = \beta \frac{z_0 + z_1}{2} + \gamma\left(\frac{z_0 + z_1}{2}\right)^2;$$

zufolge dieses Wertes ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{6}(z_1 - z_0)(Q_0 + 4M + Q_1).$$

32. Ist überhaupt eine Fläche so beschaffen, dass ihr Durchschnitt mit einer in der Höhe z parallel zu xy gelegten Ebene durch eine Formel von der Gestalt

$$U_z = \alpha + \beta z + \gamma z^2$$

quadrierbar ist, so lässt sich das Volumen der Zone zwischen den in den Höhen z_0 und z_1 gelegten Ebenen auf folgende Weise darstellen:

$$V = \tfrac{1}{6}(z_1 - z_0)(Q_0 + 4M + Q_1),$$

wobei Q_0, M und Q_1 dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 31.

33. Paraboloidische Kappen. Bezeichnet p den Abstand einer Ebene vom Koordinatenanfange und wird zur Abkürzung gesetzt

$$\cos(p, x) = \alpha, \quad \cos(p, y) = \beta, \quad \cos(p, z) = \gamma,$$

so ist bekanntlich die Gleichung der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p.$$

Verbunden mit der Paraboloidgleichung

$$Ax^2 + By^2 = 2z$$

giebt dies durch Elimination von z

$$Ax^2 + By^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma}x + 2\frac{\beta}{\gamma}y - \frac{2p}{\gamma} = 0$$

als Gleichung der Horizontalprojektion des Schnittes. Falls dieser eine Ellipse ist, was nur bei dem elliptischen Paraboloide vorkommen kann, hat man für die Fläche der Horizontalprojektion (nach S. 86, Aufg. 8)

$$\frac{\pi}{\gamma\sqrt{AB}}\left(2p + \frac{\alpha^2}{A\gamma} + \frac{\beta^2}{B\gamma}\right),$$

woraus sich durch Multiplikation mit $\sec(p, z)$ die Grösse der Schnittfläche ergiebt, nämlich

$$S_p = \frac{\pi}{\gamma^2\sqrt{AB}}\left(2p + \frac{\alpha^2}{A\gamma} + \frac{\beta^2}{B\gamma}\right).$$

Dieser elliptische Schnitt zieht sich auf einen Punkt R zusammen, wenn p denjenigen speziellen Wert h erhält, welcher durch die Formel

$$h = -\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B}\right)$$

bestimmt ist; die Berührungsebene in R liegt dann parallel zur vorigen Schnittebene.

Das Paraboloid und die Schnittebene begrenzen zusammen eine Kappe, deren Volumen sich aus der Gleichung

$$V_p = \int_h^p S_p\,dp = \int_h^p \frac{2\pi}{\sqrt{AB}} \cdot \frac{p-h}{\gamma^2}\,dp$$

ergiebt; führt man gleichzeitig die Halbparameter der Fläche ein mittels der Gleichungen $A = \frac{1}{a}$ und $B = \frac{1}{b}$, so erhält man schliesslich

$$V_p = \pi\sqrt{ab}\left(\frac{p-h}{\gamma}\right)^2.$$

Diese Formel gewinnt an Einfachheit, wenn man die Spitze T desjenigen elliptischen Kegels, welcher das Paraboloid längs der Schnittlinie berührt, in Rechnung bringt. Der Punkt T, dessen Koordinaten u, v, w heissen mögen, ist dann der Pol für die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p$$

und daher muss diese Gleichung identisch sein mit der Gleichung der Polarebene*

$$\frac{u}{a}x + \frac{v}{b}y - z = w.$$

Hieraus ergeben sich die Werte von α, β, $\frac{p}{\gamma}$, $\frac{h}{\gamma}$, und es wird

$$V_p = \pi\sqrt{ab}\left(\frac{u^2}{2a} + \frac{v^2}{2b} - w\right)^2$$

oder, wenn man beachtet, dass

---

* Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Jz + K = 0$$

und T der Pol mit den Koordinaten u, v, w. Verbindet man T mit einem Flächenpunkte P, für dessen Koordinaten x, y, z die obige Gleichung gilt, und bezeichnet die laufenden Koordinaten der Geraden PT mit ξ, η, ζ, so hat man

$$\frac{\xi - x}{u - x} = \frac{\eta - y}{v - y} = \frac{\zeta - z}{w - z}$$

oder, wenn der gemeinschaftliche Wert dieser Quotienten $= \lambda$ und

$$u - x = x_0, \quad v - y = y_0, \quad w - z = z_0$$

gesetzt wird,

$$\xi = \lambda x_0 + x, \quad \eta = \lambda y_0 + y, \quad \zeta = \lambda z_0 + z.$$

Die Gerade PT schneidet die Fläche in einem zweiten Punkte Q, dessen Koordinaten dadurch gefunden werden, dass man die ursprüngliche

$$u,\ v \text{ und } w_1 = \frac{u^2}{2a} + \frac{v^2}{2b}$$

die Koordinaten des Kappenscheitels R sind,

$$V_p = \pi\sqrt{ab}\,(w_1 - w)^2.$$

Hierin liegt der Satz: bewegt sich der Pol T auf dem Paraboloide

$$\frac{u^2}{2a} + \frac{v^2}{2b} = w + k,$$

dessen Scheitel um k tiefer liegt als der Scheitel des ursprünglichen Paraboloides und das dieselben Halbparameter a und b besitzt, so bleibt das Volumen konstant $= \pi\sqrt{ab}\,.\,k^2$.

34. **Ellipsoidische und hyperboloidische Kappen.** Unter Beibehaltung der vorigen Bedeutungen von α, β, γ und p ergiebt sich, dass die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p$$

mit der Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

einen Schnitt bildet, dessen Horizontalprojektion durch die Gleichung

$$A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

dargestellt wird, worin die Koeffizienten folgende Werte haben:

$$A_1 = A\gamma^2 + C\alpha^2,\quad B_1 = B\gamma^2 + C\beta^2,\quad C_1 = C\alpha\beta,$$
$$D_1 = -C\alpha p,\quad E_1 = -C\beta p,\quad F_1 = Cp^2 - \gamma^2.$$

Gleichung $Ax^2 + By^2 +$ u. s. w. auf den Punkt $\xi\eta\zeta$ anwendet; dies giebt für λ eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln sind

$$\lambda = 0 \quad\text{und}\quad \lambda = -2\,\frac{Ax_0x + By_0y + Cz_0z + Jz_0}{Ax_0{}^2 + By_0{}^2 + Cz_0{}^2}.$$

Der Wert $\lambda = 0$ giebt $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, entspricht also dem Punkte P; der andere Wert von λ bezieht sich daher auf den Punkt Q. Soll nun die Gerade PT die Fläche berühren, so muss Q mit P zusammenfallen, mithin der zweite Wert von λ gleichfalls verschwinden; dazu gehört

$$Ax_0x + By_0y + Cz_0z + Jz_0 = 0$$

oder vermöge der Bedeutungen von x_0, y_0, z_0

$$Aux + Bvy + Cwz - Jz + Jw = Ax^2 + By^2 + Cz^2 = -(2Jz + K),$$

d. i.

$$Aux + Bvy + (Cw + J)z + Jw + K = 0,$$

und diese Gleichung bestimmt die Polarebene, in der die Berührungspunkte liegen.

Falls $C_1^2 - A_1 B_1$ negativ, mithin

$$ABC\left(\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C}\right) > 0$$

ist und wenn zur Abkürzung

$$h^2 = \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C}$$

gesetzt wird, hat die Horizontalprojektion des Schnittes den Flächeninhalt

$$\frac{\pi\gamma(h^2 - p^2)}{\sqrt{ABC}\,.\,h^3},$$

welcher für $p = h$ verschwindet. Hieraus ergiebt sich die Grösse S_p des Querschnitts und schliesslich als Volumen der abgeschnittenen, von dem elliptischen Schnitte und von der Fläche begrenzten Kappe

$$V_p = \frac{\pi}{3\sqrt{ABC}}\left\{2 - 3\frac{p}{h} + \left(\frac{p}{h}\right)^3\right\}.$$

Legt man durch einen Punkt T, dessen Koordinaten u, v, w sein mögen, Tangenten an die Fläche, so bilden die Berührungspunkte einen Kegelschnitt, dessen Ebene die Polarebene für den Pol T darstellt und zur Gleichung hat

$$Aux + Bvy + Cwz = 1.$$

Diese Polarebene wird identisch mit der vorigen Schnittebene, wenn

$$\frac{\alpha}{p} = Au, \quad \frac{\beta}{p} = Bv, \quad \frac{\gamma}{p} = Cw$$

ist; wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ folgt hieraus

$$\frac{p}{h} = \frac{1}{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}.$$

Bezeichnet O den Mittelpunkt der Fläche, $OT = r$ den Radiusvektor des Poles T, ferner R den Durchschnitt von OT mit der Fläche, endlich $OR = r_1$ den Radiusvektor von R, so ergiebt sich leicht

$$\frac{p}{h} = \frac{r_1}{r}$$

und daher ist auch

$$V_x = \frac{\pi}{3\sqrt{ABC}}\left\{2 - 3\frac{r_1}{r} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right\}.$$

Hieran knüpft sich noch folgender Satz: wenn das Verhältnis $r_1 : r$ einen konstanten Wert behält, d. h. wenn der Pol auf einer Fläche fortrückt, die der gegebenen Fläche konzentrisch und ähnlich ist, so behält auch V_p einen konstanten Wert.

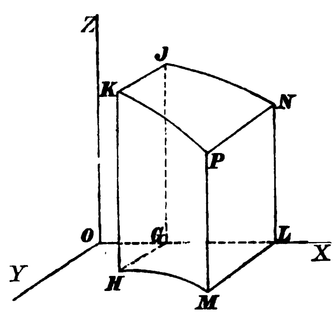
Die Formel für V_p liefert bei dem Ellipsoid und beim geteilten Hyperboloid reelle Ausdrücke, dagegen wird V_p imaginär beim einfachen Hyperboloid; in der That besitzt die letztere Fläche zwar elliptische Schnitte, wölbt sich aber über diesen nicht zu einer Kappe zusammen.

§ 18.

Die Komplanation von Cylinderflächen.

Allgemeine Formel. In der Horizontalebene (Fig. 44) sei eine durch ihre Gleichung zwischen $OL = x$ und $LM = y$ bestimmte Kurve HM gezeichnet und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade parallel zur z-Achse gezogen; auf gleiche Weise sei in der Ebene xz eine Kurve JN bestimmt durch ihre Gleichung zwischen x und $LN = z$ und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade parallel zur Achse der y gelegt; die beiden entstandenen Cylinderflächen schneiden sich in einer Kurve KP. Ist noch ein Anfangswert $OG = x_0$ gegeben, dem die Ordinaten GH und GJ entsprechen, so begrenzen die Geraden JK, NP und die Kurven JN, KP ein Stück der zweiten Cylinderfläche, von dem $GLMH$ die Horizontalprojektion darstellt, und dessen Flächeninhalt S mittels der Formel

Fig. 44.



$$S = \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + z'^2}\,.\,dx$$

berechnet wird.

Wenn sämtliche längs HM vorkommende y negativ sind, so wird S gleichfalls negativ; die Fläche S gilt daher als positiv oder negativ, je nachdem sie vor oder hinter der xz-Ebene liegt. Falls die Kurve HM die x-Achse schneidet, besteht S aus positiven und negativen Teilen, die einzeln berechnet werden müssen.

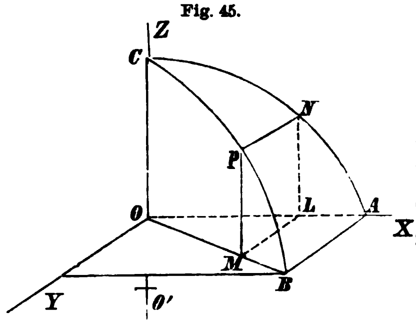
Wenn jedem x zwei Ordinaten $LM_1 = y_1$ und $LM_2 = y_2 > y_1 > 0$ entsprechen, so bildet die Horizontalprojektion von S ein gemischtliniges Viereck $H_1 H_2 M_2 M_1$, und die darüber liegende Cylinderfläche ist

$$S = \int_{x_0}^{x} (y_2 - y_1) \sqrt{1 + z'^2}\, dx.$$

Falls die Kurven $H_1 M_1$ und $H_2 M_2$ einander schneiden, sind die entstehenden Flächen einzeln zu berechnen.

Beispiele. 1. In der xy-Ebene ist ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten $OA = a$, $AB = b$ konstruiert, in der Vertikalebene xz eine Parabel ANC, deren Scheitel auf der z-Achse in der Höhe $OC = c$ liegt (Fig. 45); wird nun diese Parabel zum normalen Querschnitte eines horizontalen Cylinders genommen und die Fläche CNP mit S_x bezeichnet, so ergiebt sich

Fig. 45.



$$S_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{(a^4 + 4c^2x^2)^3} - a^6}{12\, a^2 c^2}.$$

Die ganze Fläche CAB, die einen Teil eines Klostergewölbes mit parabolischer Krümmung darstellt, besitzt demnach den Inhalt

$$S_a = \frac{b}{12} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + 4c^2)^3} - a^3}{c^2}.$$

2. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel einen Kreisbogen treten, so erhält man bei dem kreisförmigen Klostergewölbe

$$S_a = \frac{b(a^2 + c^2)}{2a}.$$

3. Handelt es sich um die Oberfläche des elliptischen Klostergewölbes, so ist der Kreisbogen AC durch einen Ellipsenquadranten zu ersetzen; dies giebt, wenn $a > c$,

$$S_x = \frac{b}{a} \int_0^x x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

dagegen im Falle $a < c$

$$S_x = \frac{b}{a} \int_0^x x \sqrt{\frac{a^2 + \lambda^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx, \quad \lambda = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}.$$

Die angedeuteten Integrationen sind mittels der Substitution $a^2 - x^2 = t^2$ leicht ausführbar; wird schliesslich $x = a$ genommen, so ergiebt sich für das gedrückte Gewölbe

$$S_a = \tfrac{1}{2} ab \left\{ 1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \right\},$$

und für das überhöhte Gewölbe

$$S_a = \tfrac{1}{2} ab \left\{ 1 + \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctan} \lambda \right\}.$$

4. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Ellipse die Astroide treten, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

so erhält man

$$S_x = \tfrac{3}{5} b \sqrt{\frac{x^5}{a^2}} = \tfrac{3}{5} ys,$$

wobei s den Bogen der Cylinderdirektrix bezeichnet.

Hiernach beträgt S_a sechs Fünftel seiner Horizontalprojektion.

5. Die Kurve AC sei wieder eine Ellipse und als Horizontalprojektion der Fläche werde eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse genommen; es ist dann

$$S_x = \frac{b}{2} \left\{ \frac{x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{a} + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right\}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

und für $x = a$

$$S_a = \tfrac{1}{2} ab \left(\cos\gamma + \frac{\gamma}{\sin\gamma} \right), \quad \cos\gamma = \frac{c}{a}.$$

6. Die Kurve AC sei wieder eine Ellipse, und als Horizontalprojektion der Fläche werde die schleifenförmige Kurve genommen, deren Gleichung

$$y = \frac{bx}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist; man findet dann

$$S_a = \frac{b(a^2 + ac + c^2)}{3(a+c)}.$$

7. Die Kurve HM sei eine Ellipse, JN eine semikubische Parabel, mithin

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad z = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}};$$

man erhält dann

$$S_x = \frac{2b}{15}\left\{7a - (7a + 3x)\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)^3}\right\}$$

und speziell $S_a = \frac{14}{15}ab$.

8. Die Gleichungen der beiden Kurven mögen sein

$$y = \frac{bc}{c-x}, \quad z = \sqrt{c^2 - x^2};$$

für die von $x = 0$ ab gerechnete Cylinderfläche ergiebt sich dann die Formel

$$S_x = yz - bc,$$

deren Sinn aus der Projektion auf die yz-Ebene leicht zu ersehen ist.

9. Nimmt man als Gleichungen der beiden Kurven

$$y = \frac{bx^2}{a^2 - x^2}, \quad z = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{8}\,.\,a},$$

so erhält man

$$S_x = yz.$$

10. Aus den Gleichungen

$$y = \frac{b^3}{a^2 - x^2}, \quad z = al\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right)$$

ergiebt sich der einfache Wert

$$S_x = xy.$$

11. Die Kurven HM und JN seien bestimmt durch die Gleichungen

$$y = b\frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad z = al\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right);$$

es ergiebt sich dann

$$S_x = \frac{bx}{a^2}(a^2 + \tfrac{1}{3}x^2),$$

woraus folgt, dass S_a das Doppelte seiner Horizontalprojektion beträgt.

12. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel eine aus dem Mittelpunkte O mit den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse treten, so erhält man

$$S_x = \frac{b}{2}\left(3a\,.\,arcsin\,\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right);$$

S_a beträgt hier das Dreifache seiner Horizontalprojektion.

13. Die Horizontalkurve sei eine Hyperbel, die Vertikalkurve eine Kettenlinie, nämlich

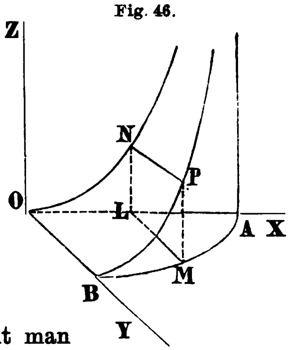
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad z = al\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right);$$

es ist dann

$$S_x = \frac{bx^2}{2a}.$$

14. In der xz-Ebene sei die Traktorie einer Geraden (Tl. I, S. 111) so gelegt, dass ihre Spitze mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt und ihre Asymptote in der Entfernung $OA = a$ senkrecht auf der x-Achse steht (Fig. 46); die Kurve hat dann zur Gleichung

Fig. 46.



$$z = \tfrac{1}{2}al\left(\frac{a + \sqrt{2ax - x^2}}{a - \sqrt{2ax - x^2}}\right) - \sqrt{2ax - x^2}.$$

Nimmt man als Begrenzungskurve der Horizontalprojektion eine durch A gehende Parabel, deren Scheitel auf der y-Achse in der Entfernung $OB = b$ liegt, so erhält man

$$S_x = \frac{bx(2a + x)}{2a},$$

hiernach beträgt S_a neun Viertel seiner Horizontalprojektion.

15. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Parabel durch einen aus den Halbachsen OA und OB konstruierten Ellipsenquadranten, so findet man

$$S_x = b\left(a - \sqrt{a^2 - x^2} + a \,.\, arcsin\,\frac{x}{a}\right),$$

und spezieller $S_a = (1 + \frac{1}{2}\pi)\,ab$.

16. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle des Ellipsenquadranten eine Halbellipse treten, deren Halbachsen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ sind, so erhält man

$$S_x = b\left\{a \,.\, arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{x(a - x)}\right\},$$

und spezieller S_a gleich dem Vierfachen seiner Horizontalprojektion.

17. In der xz-Ebene sei eine Cykloide so gelegt, dass ihr Scheitel mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt und ihre Basis

in der Entfernung $OA = 2a$ senkrecht auf der x-Achse steht; es ist dann

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}.$$

Als Horizontalprojektion der zu komplanierenden Fläche sei die Parabel

$$y = \sqrt{2bx}$$

genommen; es ergiebt sich dann

$$S_x = 2\sqrt{ab}\,.\,x.$$

Hiernach verhält sich S_{2a} zu seiner Horizontalprojektion wie 3 : 2.

18. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Parabel durch eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse, so erhält man

$$S_x = \frac{4b}{3}\left\{2a - \sqrt{\frac{(2a - x)^3}{2a}}\right\},$$

und spezieller $S_{2a} = \frac{8}{3}ab$.

19. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Ellipse eine durch die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$$

bestimmte Cissoide treten, so findet man

$$S_x = \tfrac{2}{3}\{8a^2 - (4a + x)\sqrt{2a(2a - x)}\},$$

und spezieller $S_{2a} = \frac{16}{3}a^2$.

20. In der xz-Ebene sei mit dem Halbmesser a ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist; in der xy-Ebene sei die Fusspunktkurve der Ellipse als Begrenzung der Horizontalprojektion des zu bestimmenden Flächenstücks genommen; man hat dann

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2,$$

und hieraus

$$S_x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_0^x \sqrt{\left\{\frac{b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}{a^2 - x^2}\right\}}\,dx.$$

Um die Wurzel aus dem Zähler wegzuschaffen, benutze man die Substitution

$$b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2 = b^2u^2$$

und setze zur Abkürzung

$$\frac{2a^2 - b^2}{b} = c;$$

es wird dann sehr einfach

$$S_x = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \int_b^u \frac{u\,du}{\sqrt{(u-b)(u+c)}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn nach ausgeführter Integration $x = a$ also $u = c$ genommen und

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$$

gesetzt wird,

$$S_a = a^2\{\sqrt{1+\varepsilon^2} - \varepsilon l(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2})\}.$$

21. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Fusspunktkurve der Ellipse die Fusspunktkurve der Hyperbel treten, so hat man

$$S_x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^x \sqrt{\left\{\frac{-b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2+b^2)x^2}}{a^2 - x^2}\right\}}\,dx$$

und ferner wenn

$$b^4 + 4(a^2 + b^2)x^2 = b^2u^2, \quad \frac{2a^2 + b^2}{b} = c$$

gesetzt wird,

$$S_x = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \int_b^u \frac{u\,du}{\sqrt{(u+b)(u+c)}}.$$

Nach ausgeführter Integration erhält man für $x = a$ also $u = c$ und

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \varepsilon$$

die Formel

$$S_a = a^2\left\{\sqrt{\varepsilon^2+1} - \sqrt{\varepsilon^2-1} - \varepsilon l\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)\right\}.$$

Im speziellen Falle $b = a$ wird die Fusspunktkurve zur Lemniskate und

$$S_a = a^2\{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2}\,.\,l(2 + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3})\};$$

hieraus folgt, dass sich S_a zu seiner Horizontalprojektion nahezu wie 1,43 zu 1 verhält.

§ 19.

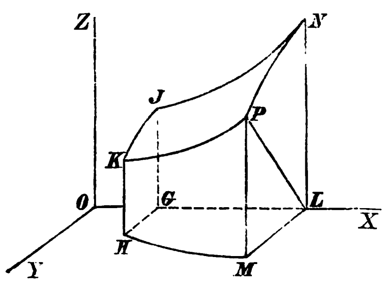
Die Komplanation von Umdrehungsflächen.

Allgemeine Formeln. Eine durch ihre Gleichung zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x und y bestimmte, in der Ebene xy liegende Kurve werde um die x-Achse gedreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt; der von einem gegebenen Anfangspunkte $x_0 y_0$ bis zu einem beliebigen Endpunkte xy reichende Kurvenbogen s beschreibt dann eine Rotationsfläche, deren Inhalt T_x mittels der Formel

$$T_x = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1+y'^2}.\, dx$$

berechnet wird.

Fig. 47.



Geschieht die Drehung um die y-Achse, so gilt die analoge Formel

$$T_y = 2\pi \int_{x_0}^{x} x\sqrt{1+y'^2}.\, dx.$$

Allgemeiner ist die folgende Aufgabe (Fig. 47). Eine in der Ebene xz gezeichnete Kurve JN sei um die x-Achse gedreht und die entstandene Rotationsfläche werde von einem vertikalen Cylinder geschnitten, dessen Leitlinie HM in der xy-Ebene gegeben ist. Setzt man $OG = x_0$, $OL = x$, $LM = y$, $LN = z$ und bezeichnet mit S_x den Inhalt des Flächenstückes $KJNP$, dessen Horizontalprojektion $GHML$ ist, so hat man

$$S_x = \int_{x_0}^{x} z\sqrt{1+z'^2}.\, arcsin\frac{y}{z}\, dx.$$

Nimmt man speziell $z = y$, so geht $4S_x$ in das frühere T_x über.

Beispiele. 1. Wird die Parabel

$$y^2 = 2px$$

um die x-Achse gedreht, so ist für eine Kappe des entstehenden Rotationsparaboloids

$$T_x = \tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{u^3}{p} - p^2\right), \quad u = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

Dagegen ergiebt sich bei der Drehung um die y-Achse

$$T_y = \tfrac{1}{8}\pi\left[\frac{uy}{p^2}(u^2 + y^2) - p^2 l\left(\frac{u+y}{p}\right)\right].$$

2. Eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse werde um die grosse Achse $2a$ gedreht; die Fläche der von $x = 0$ ab gerechneten Zone ist dann

$$T_x = \pi b \left\{ \frac{x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{a} + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right\}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Das Doppelte von T_a giebt die Oberfläche des gestreckten Rotationsellipsoids

$$= 2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right).$$

Wird dagegen die Ellipse um die kleine Achse $2b$ gedreht, so ist die Fläche der von $y = 0$ ab gerechneten Zone

$$T_y = \pi a \left\{ \frac{y\sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2}}{b} + \frac{b}{\lambda} l\left(\frac{\lambda y + \sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2}}{b}\right) \right\}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

das Doppelte von T_b giebt die Oberfläche des abgeplatteten Rotationsellipsoids

$$= 2\pi a\left[a + \frac{b}{\lambda} l(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\right] = 2\pi a\left[a + \frac{b^2}{\varepsilon a} l\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)\right].$$

3. Für die beiden Hyperboloide gelten ähnliche Formeln, bei denen nur zu beachten ist, dass man von $x_0 = a$ ausgehen muss.

4. Die schleifenförmige Kurve, deren Gleichung ist

$$y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{8} \,.\, a},$$

giebt bei der Umdrehung um die x-Achse

$$Z_x = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{x^2(3a^2 - x^2)}{a^2};$$

die ganze Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers ist hiernach $= \frac{1}{2}\pi a^2$.

Wird dieselbe Kurve um die y-Achse gedreht, so findet sich

$$Z_y = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{5a^3 - (5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

und die Gesamtoberfläche $= \frac{5}{3}\pi\sqrt{2} \,.\, a^2$.

5. Die **Astroide**, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

werde um die x-Achse gedreht, es ist dann, wenn $x = a\cos^3\psi$, $y = a\sin^3\psi$ gesetzt und demgemäss auch ds durch ψ ausgedrückt wird,

$$Z_x = \tfrac{6}{5}\pi a^2 \sin^5\psi,$$

woraus $\frac{12}{5}\pi a^2$ als Oberfläche des ganzen Rotationskörpers folgt.

Auf gleiche Weise lässt sich der Fall behandeln, wo die Evolute der Ellipse um eine ihrer Achsen gedreht wird.

6. Bei der **Kardioide** hat man

$$x = b(1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = b(1 + \cos\theta)\sin\theta,$$

mithin, wenn die Kurve um die x-Achse gedreht wird,

$$Z_x = \tfrac{32}{5}\pi b^2 (1 - \cos^5 \tfrac{1}{2}\theta),$$

und die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers $= \frac{32}{5}\pi b^2$.

Lässt man die Kardioide um die y-Achse rotieren, so entstehen zwei Umdrehungsflächen, eine äussere, die den Werten $\theta = 0$ bis $\theta = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, und eine innere, bei der θ mit $\frac{1}{2}\pi$ anfängt und mit π aufhört. Für die äussere Oberfläche ist

$$Z_y = 16\pi b^2 (1 - \sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{2}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}\theta)\sin\tfrac{1}{2}\theta, \quad \theta \leqq \tfrac{1}{2}\pi,$$

mithin die gesamte äussere Fläche

$$= \frac{24\sqrt{2}}{5}\pi b^2.$$

Bei der inneren Fläche setze man $\theta = \pi - \eta$ und vertausche x gegen $-x$, um positive Abscissen zu erhalten; es ergiebt sich dann

$$Z_y = 16\pi b^2 \{(1 - \cos^2\tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{2}{5}\cos^4\tfrac{1}{2}\eta)\cos\tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{2}{5}\}, \quad \eta \leqq \tfrac{1}{2}\pi,$$

und für die ganze innere Fläche

$$\frac{8(3\sqrt{2} - 4)}{5}\pi b^2.$$

Die gesamte krumme Oberfläche des entstandenen Hohlkörpers ist demnach

$$\frac{16(3\sqrt{2} - 2)}{5}\pi b^2.$$

7. Die rotierende Kurve sei die Fusspunktkurve der Ellipse, mithin ihre Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin\theta, \quad a > b;$$

werden x, y und ds durch θ ausgedrückt, so ergiebt sich als Gesamtoberfläche des bei der Rotation um die x-Achse entstehenden Körpers

$$2\pi\left\{a^2 + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\, l\left(\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}\right)\right\}.$$

Durch Drehung der Kurve um die y-Achse dagegen entsteht ein Rotationskörper von der Oberfläche

$$2\pi\left\{b^2 + \frac{a^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\, arccos\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}.$$

8. Die rotierende Kurve sei die Fusspunktkurve der Hyperbel, mithin ihre Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta - b^2 \sin^2\theta;$$

verfährt man wie bei der vorigen Aufgabe und beachtet, dass $arctan\,\frac{a}{b}$ der Maximalwert von θ ist, so erhält man für die Gesamtoberfläche des bei der Drehung um die x-Achse entstehenden Körpers

$$2\pi\left\{a^2 - \frac{ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\, l\left(\frac{(a^2 + \sqrt{a^4 - b^4})(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{b^3}\right)\right\}, \quad a > b,$$

$$2(2 - \sqrt{2})\pi a^2, \quad a = b,$$

$$2\pi\left\{a^2 - \frac{ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b^4}{\sqrt{b^4 - a^4}}\, arccos\,\frac{a^3 + (b^2 - a^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{b^3}\right\}, \quad a < b.$$

Lässt man dagegen die Kurve um die y-Achse rotieren, so beträgt die Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers

$$\frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left\{b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arccos\,\frac{b}{a}\right\}, \quad a > b,$$

$$2\sqrt{2}\,.\,\pi a^2, \quad a = b.$$

$$\frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left\{b + \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)\right\}. \quad a < b.$$

9. Lässt man eine Kettenlinie um die x-Achse rotieren, so ist der Flächeninhalt der von $x_0 = 0$ ab gerechneten Zone

$$Z_x = \pi(ax + ys);$$

bei der Rotation um die y-Achse ergiebt sich dagegen als Oberfläche einer von $y_0 = a$ ab gerechneten Kappe

$$Z_y = 2\pi[xs - a(y - a)].$$

10. Wenn die Traktorie der Geraden um ihre zur Abscissenachse genommene Asymptote rotiert, so ist der Flächeninhalt der von $x = 0$, $y = a$ ab gerechneten Zone

$$Z_x = 2\pi a(a - y);$$

die Gesamtoberfläche des entstandenen Rotationskörpers beträgt mithin das Vierfache der Kreisfläche πa^2.

Die Berechnung von Z_y führt auf ein Integral, welches sich nur durch Verwandlung in eine unendliche Reihe entwickeln lässt.

11. Nimmt man in der Cykloide einen Scheitel zum Koordinatenanfang, die Scheiteltangente zur y-Achse, und bezeichnet den Durchmesser des erzeugenden Kreises mit h, so ist $s = 2\sqrt{hx}$, mithin die Oberfläche einer von $x = 0$ ab gerechneten, durch Drehung um die x-Achse entstandenen Kappe

$$Z_x = 2\pi\{ys - \tfrac{4}{3}[h^2 - \sqrt{h(h-x)^3}]\};$$

für $x = h$ ergiebt sich als Oberfläche des ganzen Rotationskörpers

$$2\pi(\pi - \tfrac{4}{3})h^2.$$

Lässt man dagegen die Cykloide um ihre Basis rotieren, so ist die Fläche der von $y = 0$ ab gerechneten Zone

$$= 4\pi(h - \tfrac{1}{3}x)\sqrt{hx},$$

mithin die Oberfläche des von einem ganzen Cykloidenzuge erzeugten Rotationskörpers $= \frac{16}{3}\pi h^2$.

12. Eine in der Ebene xz konstruierte, durch die Gleichung

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > c$$

bestimmte Ellipse sei um die x-Achse gedreht und hierdurch ein Rotationsellipsoid erzeugt worden; letzteres werde von einem vertikalen elliptischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad b < c$$

haben möge; es soll derjenige Teil der Ellipsoidoberfläche berechnet werden, welcher innerhalb des Cylinders liegt.

Nach der auf S. 161, Aufgabe 2, eingeführten Bezeichnung ist, von $x = 0$ ab genommen,

$$S_x = \frac{c}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}.\, arcsin\,\frac{b}{c}\,dx, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

oder

$$S_x = \frac{c}{2a}\left\{x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\,arcsin\,\frac{\varepsilon x}{a}\right\} arcsin\,\frac{b}{c}\cdot$$

Das Achtfache von S_a giebt die gesuchte Fläche

$$K = 4c\left\{c + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\,arccos\,\frac{c}{a}\right\} arcsin\,\frac{b}{c}\cdot$$

Für $c = a$ geht das Ellipsoid in eine Kugel über und es wird

$$K = 8a^2\,arcsin\,\frac{b}{a}\cdot$$

13. Ein aus dem Koordinatenanfange mit dem Radius a in der xz-Ebene beschriebener Kreis sei um die x-Achse gedreht und dadurch eine Kugelfläche erzeugt worden. Diese werde von einem vertikalen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$by = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}, \quad b \geqq a$$

haben möge; man sucht den innerhalb des Cylinders liegenden Teil der Kugelfläche.

Für $x_0 = 0$ ab gerechnet ist

$$S_x = a\int_0^x arcsin\,\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\,dx = a\int_0^x arccos\,\frac{x}{b}\,dx$$

$$= a\left(b - \sqrt{b^2 - x^2} + x\,.\,arccos\,\frac{x}{b}\right),$$

und hieraus findet sich für die ganze Fläche

$$K = 8a\left(b - \sqrt{b^2 - a^2} + a\,.\,arccos\,\frac{a}{b}\right)\cdot$$

In dem speziellen Falle $b = a$ wird der Cylinder ein parabolischer Cylinder und $K = 8a^2$.

14. Die vorige Kugel werde von einem Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die schleifenförmige, durch die Gleichung

$$by = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad b \geqq a$$

charakterisierte Kurve ist; es ergiebt sich dann

$$K = 8a\left(a \,.\, arcsin \frac{a}{b} - b + \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

15. Die vorige Kugel werde von einem vertikalen Kreiscylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2, \quad c < a$$

haben möge; es ist dann

$$S_x = a\int_{x_0}^{x} arcsin\sqrt{1 - \frac{2c}{a + x}} \cdot dx = a\int_{x_0}^{x} arccos\sqrt{\frac{2c}{a + x}}\, dx.$$

Mittels der Substitution

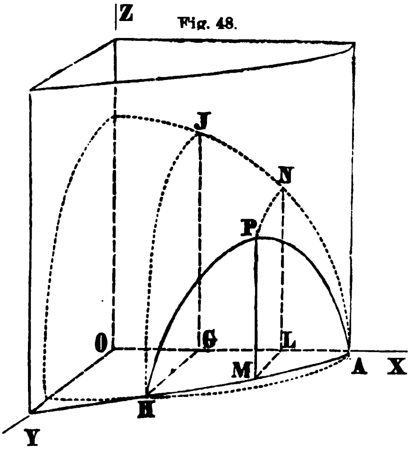
$$\frac{2c}{a + x} = \xi^2$$

und durch partielle Integration findet man den Wert des Integrals, wobei $x_0 = 2c - a$ genommen werden muss; das ganze innerhalb des Cylinders liegende Stück der Kugelfläche ist

$$K = 8a\left\{a \,.\, arccos\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{c(a - c)}\right\}.$$

In dem speziellen Falle $c = \frac{1}{2}a$ kommt der Cylinderdurchmesser gleich dem Kugelhalbmesser und es wird

Fig. 48.



$$K = 2\pi a^2 - 4a^2,$$

mithin der von der Halbkugel übrig bleibende Rest $= 4a^2$.

16. Die vorige Kugel werde von einem vertikalen, parabolischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur durch die Gleichung

$$y^2 = 2b(a - x), \quad b < a$$

bestimmt ist und die Horizontalspur der Kugel in zwei Punkten schneidet, die der Abscisse $OG = 2b - a$ entsprechen (Fig. 48). Verfährt man ähnlich wie vorhin und nimmt $x_0 = 2b - a$, so erhält man für dasjenige Stück der Kugelfläche, das innerhalb des Cylinders

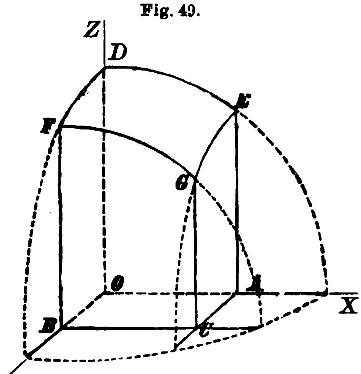
liegt und ausserdem von der (allseitig erweiterten) Vertikalebene GHJ begrenzt wird,

$$K = 4a\left\{2\sqrt{b(a-b)} - \pi b + 2a \,.\, arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}\right\}.$$

Im speziellen Falle $b = \frac{1}{2}a$ wird $K = 4a^2$.

17. Um die Oberfläche des Kugelgewölbes zu bestimmen (Fig. 49), worin der Kugelradius $OD = c$ und ferner $OA = a$, $OB = b$ ist, hat man zunächst

Fig. 49.



$$S_x = c\int_0^x arcsin\frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\,dx;$$

benutzt man die partielle Integration und nachher die Substitution

$$x = \frac{cu}{\sqrt{c^2 + u^2}},$$

so findet man

$$S_a = c(a\alpha + b\beta - c\gamma),$$

worin die Bögen α, β, γ durch die Gleichungen

$$sin\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad sin\,\beta = \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad sin\,\gamma = sin\,\alpha\, sin\,\beta$$

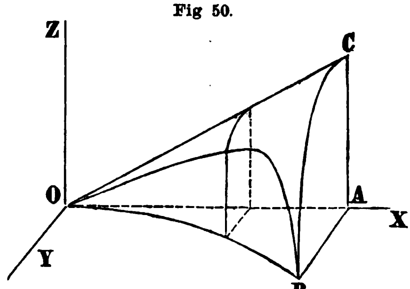
bestimmt sind.

Wenn der Punkt G in der Horizontalebene liegt, ist einfacher

$$S_a = \tfrac{1}{2}\pi c(a + b - c).$$

18. Ein Rotationskegel $OABC$ (Fig. 50) wird von einem vertikalen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur eine semikubische Parabel ist; man verlangt den Inhalt desjenigen Teiles der Kegelfläche, der innerhalb des Cylinders liegt und überdies von der Vertikalebene ABC begrenzt wird.

Fig 50.



Für $OA = a$, $AB = b$, $OC = c$ hat man

$$z = \frac{b}{a}x, \quad y = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3},$$

$$S_x = \frac{bc}{16a^2}\left\{(8x^2 - 3a^2)\,arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} + (3a + 2x)\sqrt{x(a-x)}\right\};$$

die gesuchte Fläche beträgt hiernach fünf Achtel des Kegelmantels.

19. Der vorige Kegel werde von einem vertikalen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die schleifenförmige, durch die Gleichung

$$y = \frac{bx}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

dargestellte Kurve ist; man erhält dann

$$S_x = \frac{bc}{4a^2}\left\{2x^2 \arccos\frac{x}{a} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - x\sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

Spezieller ist $S_a = \frac{1}{8}\pi bc$, mithin der gesamte, innerhalb des Cylinders liegende Teil des Doppelkegels gleich dem Mantel des einfachen Kegels.

Für $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ erreicht y sein Maximum und S_x geht über in

$$S_{a'} = \tfrac{1}{8}(\pi - 1)\,bc,$$

mithin besitzt $S_a - S_{a'}$ den rationalen Wert $\frac{1}{8}bc$.

20. Eine durch die Gleichung

$$z = 2\sqrt{cx}$$

charakterisierte Parabel sei um ihre Achse gedreht und das entstandene Rotationsparaboloid von einem elliptischen Cylinder geschnitten worden, dessen Horizontalspur zur Gleichung hat

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2};$$

zur Vereinfachung sei noch angenommen, dass

$$b^2 = \frac{4a^2c}{2a + c},$$

mithin der Halbparameter der Ellipse gleich dem harmonischen Mittel zwischen $2a$ und c ist.

Die gesamte innerhalb des Cylinders liegende Paraboloidfläche beträgt

$$\tfrac{16}{3}\left\{\frac{4a + 3c}{3}\sqrt{2ac} - c^2 \arctan\sqrt{\frac{2a}{c}}\right\}.$$

Im speziellen Falle $a = \frac{3}{2}c$ wird der elliptische Cylinder zu einem Kreiscylinder und die Paraboloidfläche

$$= 16\left(\sqrt{3} - \tfrac{1}{9}\pi\right)c^2.$$

Kapitel IV.

Statische und Trägheitsmomente.

---

§ 20.

Statische Momente.

I. Das Flächenelement $y\,dx$ der homogenen ebenen Fläche, die von der Kurve $y = f(x)$, der Abscissenachse und den zu den Abscissen x_0 und x gehörigen Ordinaten begrenzt ist, hat in Bezug auf die x-Achse das statische Moment $y\,dx \cdot \frac{1}{2} y$, in Bezug auf die y-Achse $y\,dx . x$, also sind die statischen Momente der Fläche:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} y^2\,dx, \quad M_y = \int_{x_0}^{x} xy\,dx.$$

Ist der Inhalt der Fläche

$$U = \int_{x_0}^{x} y\,dx$$

bekannt, so ergeben sich die Koordinaten ξ, η des Schwerpunkts der Fläche aus

$$U\xi = M_y, \quad U\eta = M_x.$$

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten r und θ gegeben, so hat das Flächenelement $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ des zwischen θ_0 und θ liegenden Sektors der Kurve in Bezug auf die als Polarachse genommene x-Achse das Moment $\frac{1}{2} r^2 d\theta \cdot \frac{2}{3} r \sin\theta$, in Bezug auf die y-Achse $\frac{1}{2} r^2 d\theta \cdot \frac{2}{3} r \cos\theta$, also hat man die Momente des Sektors

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\theta} r^3 \sin\theta\,d\theta, \quad M_y = \frac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\theta} r^3 \cos\theta\,d\theta.$$

Kennt man den Inhalt des Sektors

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\,d\theta,$$

so hat man die Koordinaten ξ, η seines Schwerpunkts zu berechnen aus

$$S\xi = M_y, \quad S\eta = M_x.$$

Beispiele. 1. Parabel: $y^2 = 2px$; für die Fläche über der Abscisse x ist

$$M_x = \tfrac{1}{4} xy^2, \quad M_y = \tfrac{2}{5} x^2 y; \quad \xi = \tfrac{3}{5} x, \quad \eta = \tfrac{3}{8} y.$$

2. Ellipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; die Fläche über der Abscisse x hat die Momente

$$M_x = \frac{b^2}{6a^2} x(3a^2 - x^2), \quad M_y = \frac{a^3}{3b^2}(b^3 - y^3);$$

also ist für den Quadranten der Ellipsenfläche

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

3. Hyperbel: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; für die Fläche über $x - a$ ergeben sich:

$$M_x = \frac{b^2}{6a^2}(x^3 - 3a^2x + 2a^3), \quad M_y = \frac{a^2y^3}{3b^2}.$$

4. Die über der Abscissenachse liegende Hälfte der Schleife, die die Kurve (§ 11 Nr. 16)

$$y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x},$$

bildet, hat die Momente

$$M_x = (l\,2 - \tfrac{2}{3})\,a^3, \quad M_y = (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{2}{3})\,a^3.$$

5. Logarithmische Linie: $y = be^{\frac{x}{a}}$; für die Fläche über der Abscisse x erhält man

$$\xi = \frac{xy}{y - b} - a, \quad \eta = \tfrac{1}{4}(y + b).$$

6. Gewölblinie: $y = \tfrac{1}{2} b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; die Fläche über der Abscisse x hat als Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x - a\sqrt{\frac{y - b}{y + b}}, \quad \eta = \tfrac{1}{4}\left(y + \frac{b^2x}{a\sqrt{y^2 - b^2}}\right).$$

7. Cykloide: $x = b(\omega - \sin\omega)$, $y = b(1 - \cos\omega)$; für die Fläche des halben Cykloidenzugs von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ ergeben sich

$$\xi = \tfrac{1}{2}\pi b + \frac{8}{9\pi} b, \quad \eta = \frac{5}{6} b.$$

8. Kardioide: $r = 2a(1 + \cos\theta)$; für die Fläche von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = \pi$ findet man

$$\xi = \frac{5}{3} a, \quad \eta = \frac{32}{9\pi} a.$$

9. Spirale des Archimedes: $r = a\theta$; die Fläche von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = \pi$ hat die statischen Momente

$$M_x = \tfrac{1}{3}\pi(\pi^2 - 6)a^3, \quad M_y = -\pi(\pi^2 - 4)a^3;$$

dagegen die Fläche von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = \frac{1}{2}\pi$:

$$M_x = (\tfrac{1}{4}\pi^2 - 2)a^3, \quad M_y = (\tfrac{1}{24}\pi^3 - \pi + 2)a^3.$$

10. Logarithmische Spirale: $r = ae^\theta$; die statischen Momente der Fläche von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = \pi$ sind

$$M_x = \tfrac{1}{80}a^3(e^{3\pi} + 1), \quad M_y = -\tfrac{1}{10}a^3(e^{3\pi} + 1).$$

Für den Schwerpunkt hat man $\tan\theta = -\frac{1}{3}$.

II. Das Element ds des homogenen Bogens der ebenen Kurve $y = f(x)$ zwischen den Punkten x_0y_0 und xy hat in Bezug auf die x-Achse das statische Moment $ds \,.\, y$, auf die y-Achse $ds \,.\, x$; also sind die statischen Momente des Bogens

$$M_x = \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \quad M_y = \int_{x_0}^{x} x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten r und θ gegeben, so hat das Bogenelement ds in Bezug auf die Achsen die statischen Momente $ds \,.\, r\sin\theta$ und $ds \,.\, r\cos\theta$, folglich ist

$$M_x = \int_{\theta_0}^{\theta} r\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot \sin\theta\, d\theta, \quad M_y = \int_{\theta_0}^{\theta} r\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot \cos\theta\, d\theta.$$

Kennt man die Bogenlänge

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta,$$

so bestimmen sich die Koordinaten ξ, η des Schwerpunkts des Bogens aus

$$s\xi = M_y, \quad s\eta = M_x.$$

Ist eine Raumkurve durch ihre Projektionen auf die xy- und xz-Ebene bestimmt, so erhält man die statischen Momente des zwischen $x_0y_0z_0$ und xyz liegenden Bogens bezogen auf die drei Koordinatenebenen entsprechend

$$M_{xy} = \int_{x_0}^{x} z\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx,$$

$$M_{xz} = \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx,$$

$$M_{yz} = \int_{x_0}^{x} x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Ist die Länge des Bogens

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

berechnet, so findet man die Koordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunkts aus

$$s\xi = M_{yz}, \quad s\eta = M_{xz}, \quad s\zeta = M_{xy}.$$

Beispiele. 1. Parabel $y^2 = 2px$; für den vom Scheitel an gerechneten Bogen erhält man, wenn $\sqrt{p^2 + y^2} = u$ gesetzt wird:

$$M_x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{u^3}{p} - p^2\right), \quad M_y = \tfrac{1}{16}\left[\frac{uy}{p^2}(u^2 + y^2) - p^2 l\left(\frac{u + y}{p}\right)\right].$$

2. Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; der Bogen von $x_0 = 0$ an gerechnet hat die statischen Momente:

$$M_x = \tfrac{1}{2} b\left(\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

$$M_y = \tfrac{1}{2} a\left[a + \frac{b}{\lambda} l(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\right]$$

$$- \tfrac{1}{2} a\left[\frac{y}{b}\sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2} + \frac{b}{\lambda} l\left(\frac{\lambda y + \sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2}}{b}\right)\right], \quad \lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

also für den Quadrantenbogen:

$$M_a = \tfrac{1}{2} b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

$$M_b = \tfrac{1}{2} a\left[a + \frac{b}{\lambda} l(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\right] = \tfrac{1}{2} a\left[a + \frac{b^2}{\varepsilon a} l\left(\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}\right)\right].$$

3. Astroide: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; der von $x_0 = 0$ an gerechnete Bogen hat die statischen Momente:

$$M_x = \tfrac{3}{5}(a^2 - y\sqrt[3]{ay^2}), \quad M_y = \tfrac{3}{5}x\sqrt[3]{ax^2};$$

also erhält man für den Quadrantenbogen $\xi = \eta = \frac{2}{5}a$.

4. Kettenlinie: $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; es ergeben sich für den von $x_0 = 0$ an gerechneten Bogen:

$$M_x = \tfrac{1}{2}(y\sqrt{y^2 - a^2} + ax), \quad M_y = x\sqrt{y^2 - a^2} - a(y - a);$$

$$\xi = x - a\sqrt{\frac{y-a}{y+a}}, \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(y + \frac{ax}{\sqrt{y^2 - a^2}}\right).$$

5. Cykloide: $x = b(\omega - \sin\omega)$, $y = b(1 - \cos\omega)$; der Bogen des halben Cykloidenzugs hat die Schwerpunktskoordinaten $\xi = \eta = \frac{4}{3}b$.

6. Kardioide: $r = 2a(1 + \cos\theta)$; der Bogen von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = \pi$ hat die Schwerpunktskoordinaten $\xi = \eta = \frac{8}{5}a$.

7. Logarithmische Spirale: $r = ae^{\theta}$; für den Bogen von $\theta_0 = 0$ bis $\theta = \pi$ erhält man

$$M_x = \tfrac{1}{5}a^2\sqrt{2}(e^{2\pi} + 1), \quad M_y = -\tfrac{2}{5}a^2\sqrt{2}(e^{2\pi} + 1);$$

für den Schwerpunkt ergiebt sich $\tan\theta = -\frac{1}{2}$.

8. Lemniskate: $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$; der von $\theta_0 = 0$ an gerechnete Bogen hat die statischen Momente

$$M_x = a^2(1 - \cos\theta), \quad M_y = a^2\sin\theta.$$

Da der Quadrantenbogen nach § 13 Nr. 33 die Länge $1{,}31103 \, . \, a$ hat, ergeben sich

$$\xi = 0{,}53935 \, . \, a, \quad \eta = 0{,}22342 \, . \, a.$$

9. Die Raumkurve, die durch ihre Projektionen:

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

bestimmt ist (Tl. I, § 21 Nr. 1; Tl. II, § 16 Nr. 1), ergiebt für den von $x_0 = 0$ an gerechneten Bogen

$$M_{xy} = \tfrac{1}{6}y^2 + \tfrac{1}{2}z^2, \quad M_{xz} = (a + \tfrac{3}{5}y)z, \quad M_{yz} = (a + \tfrac{1}{2}y)y.$$

10. Der Bogen der in § 16 Nr. 5 behandelten Raumkurve

$$y = 2\sqrt{2bx}, \quad z = bl\left(\frac{x}{a}\right),$$

von $x_0 = a$ an gerechnet, hat die statischen Momente:

$$M_{xy} = ab + xz - \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{1}{2}z^2,$$

$$M_{xz} = 4\sqrt{2ab}\left[(\tfrac{1}{3}x + b)\sqrt{\frac{x}{a}} - (\tfrac{1}{3}a + b)\right],$$

$$M_{yz} = \tfrac{1}{2}(x-a)^2 + b(x-a).$$

11. Schraubenlinie (Tl. I, § 21 Nr. 8): $x = a\cos\omega$, $y = a\sin\omega$, $z = b\omega$, $b = a\tan\beta$; der von $x_0 = a$ an gerechnete Bogen hat die Länge

$$s = \frac{z}{\sin\beta},$$

und die statischen Momente

$$M_{xy} = \frac{z^2}{2\sin\beta}, \quad M_{xz} = \frac{a(a-x)}{\cos\beta}, \quad M_{yz} = \frac{ay}{\cos\beta},$$

also ergeben sich

$$\xi = \frac{by}{z}, \quad \eta = \frac{b(a-x)}{z}, \quad \zeta = \tfrac{1}{2}z.$$

12. Durchschnitt eines parabolischen und eines cykloidischen Cylinders (Tl. I, § 21 Nr. 7)

$$y = 2\sqrt{ax}, \quad x = \tfrac{1}{2}b(1+\cos\omega), \quad z = \tfrac{1}{2}b(\pi - \omega + \sin\omega).$$

Da

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{b-x}{x}}, \quad ds = \sqrt{\frac{a+b}{x}}\,dx$$

ist, so erhält man für die Länge des von $x_0 = 0$ an gerechneten Bogens

$$s = 2\sqrt{(a+b)x};$$

mithin ergeben sich die Koordinaten seines Schwerpunkts

$$\xi = \tfrac{1}{3}x, \quad \eta = \sqrt{ax}, \quad \zeta = b\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{b}} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{2b+x}{x}\sqrt{\frac{b-x}{x}}\right);$$

also für $x = b$

$$\xi = \tfrac{1}{3}b, \quad \eta = \sqrt{ab}, \quad \zeta = (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3})b.$$

III. Die homogene Fläche U in I rotiert um die x-Achse. Das normal zur Rotationsachse genommene Volumenelement $\pi y^2 dx$ hat in Bezug auf die yz-Ebene das statische Moment $\pi y^2 dx . x$; folglich ist das statische Moment des Rotationskörpers

$$M = \pi\int_{x_0}^{x} xy^2\,dx.$$

Ist das Volumen des Rotationskörpers

$$V_x = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx$$

bekannt, so erhält man die Abscisse ξ des auf der Rotationsachse liegenden Schwerpunkts aus

$$V_x \,.\, \xi = M.$$

Beispiele. 1. Parabel: $y^2 = 2px$; die Fläche über der Abscisse x wird um die Achse der Parabel gedreht. Es ist

$$M = \tfrac{2}{3}\pi p x^3, \quad \xi = \tfrac{2}{3} x.$$

2. Fläche der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ über $a - x$ um die grosse Achse der Ellipse gedreht:

$$M = \tfrac{1}{4}\pi \frac{a^2}{b^2} y^4;$$

also für das halbe Rotationsellipsoid $\xi = \frac{3}{8} a$.

3. Fläche der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ über $x - a$ um die Hauptachse gedreht:

$$M = \tfrac{1}{4}\pi \frac{a^2}{b^2} y^4, \quad \xi = \tfrac{3}{4}\left(x + \frac{a^2}{x + 2a}\right).$$

4. Cissoide: $(2a - x) y^2 = x^3$; Fläche der Kurve von $x_0 = 0$ bis $x = a$ rotiert um die x-Achse:

$$M = \pi\left(16 l 2 - \tfrac{131}{12}\right) a^4, \quad \xi = 0{,}81986 \,.\, a.$$

5. Der Quadrant der Lemniskate, für den

$$y^2 = \tfrac{1}{2}\left[a\sqrt{a^2 + 8x^2} - (a^2 + 2x^2)\right]$$

ist, rotiert um die x-Achse. Der Rotationskörper hat das Moment $\frac{1}{24}\pi a^4$.

6. Die Fläche des halben Cykloidenzugs rotiert um die x-Achse. Es ergiebt sich

$$\xi = \tfrac{1}{2}\pi b + \frac{64}{45\pi} b.$$

7. Logarithmische Linie: $y = b e^{\frac{x}{a}}$; die Fläche über $x - x_0$ rotiert um die x-Achse. Für den Rotationskörper ist

$$\xi = \frac{x y^2 - x_0 y_0^2}{y^2 - y_0^2} - \tfrac{1}{2} a.$$

8. Kettenlinie: $y = \frac{1}{2} a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; die Fläche über der Abscisse x rotiert um die x-Achse. Der Schwerpunkt des Rotationskörpers hat, wenn der Bogen $s = \sqrt{y^2 - a^2}$ ist, die Abscisse

$$\xi = \frac{1}{2}\left(x + s\frac{xy - as}{ax + ys}\right).$$

IV. Der homogene Bogen s der Kurve $y = f(x)$ in II rotiert um die x-Achse. Das Oberflächenelement $2\pi y\, ds$ hat in Bezug auf die yz-Ebene das statische Moment $2\pi y\, ds . x$, folglich ergiebt sich das statische Moment der Rotationsfläche bezogen auf die yz-Ebene

$$M = 2\pi \int_{x_0}^{x} xy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Hat man den Inhalt der Rotationsfläche

$$T_x = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

bestimmt, so ergiebt sich die Abscisse des auf der Rotationsachse liegenden Schwerpunkts aus

$$T_x . \xi = M.$$

Beispiele. 1. Der Bogen der Parabel $y^2 = 2px$ vom Scheitel bis zum Punkte xy rotiert um die Achse; dann ist für die Rotationsfläche

$$M = \frac{1}{15}\pi\left(3\frac{u^5}{p^2} - 5u^3 + 2p^3\right), \quad u = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

2. Der Bogen der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zwischen x und a rotiert um die grosse Achse, es ist dann

$$M = \frac{2}{3}\pi\frac{b}{\varepsilon^2 a}\left[\sqrt{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^3} - b^3\right];$$

demnach für die Fläche des halben Rotationsellipsoids

$$M = \frac{2}{3}\pi ab\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}.$$

3. Ein Quadrant der Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ rotiert um die x-Achse; man erhält:

$$M = \frac{9}{128}\pi^2 a^3, \quad \xi = \frac{15\pi}{256} \cdot a.$$

4. Der halbe **Cykloidenzug** rotiert um die x-Achse; es ergiebt sich für die Rotationsfläche

$$\xi = \tfrac{26}{15} b.$$

5. Der Bogen der **Kettenlinie** $y = \frac{1}{2} a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ von $x = 0$ an gerechnet, dreht sich um die x-Achse. Der Schwerpunkt der Rotationsfläche ist derselbe wie der des Rotationskörpers in III Nr. 8.

6. Der Quadrant der **Lemniskate** $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ rotiert um die x-Achse. Dann hat man für das statische Moment eines Flächenelementes der Rotationsfläche

$$2\pi xy\, ds = 2\pi r^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta;$$

damit erhält man

$$M = \tfrac{1}{3}\pi a^3, \quad \xi = \frac{2 + \sqrt{2}}{6} \cdot a.$$

V. Das statische Moment eines homogenen Raumgebildes in Bezug auf eine Achse oder eine Ebene lässt sich durch ein einfaches Integral ausdrücken, wenn es gelingt, das statische Moment eines Elementes in Bezug auf die Momentenachse oder Momentenebene zu bestimmen.

Beispiele. 1. Ein Ast der **Cissoide** $(2a - x)y^2 = x^3$ dreht sich um die Asymptote. Ein Volumenelement des Rotationskörpers, das normal zur Rotationsachse genommen wird, hat in Bezug auf die durch die x-Achse normal zur Asymptote gelegte Ebene das Moment $\pi(2a - x)^2 dy \,.\, y$, also ist das statische Moment des Rotationskörpers:

$$M = \pi \int_0^{2a} x^2 (2a - x)\, dx = 4\pi a^4;$$

folglich liegt der Schwerpunkt auf der Asymptote im Abstand $\frac{4a}{\pi}$ von der x-Achse.

2. Das statische Moment des durch die yz-Ebene halbierten **Ellipsoids**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in Bezug auf diese Ebene zu bestimmen. Ein Volumenelement normal zur x-Achse hat, wenn

$$u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad v^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

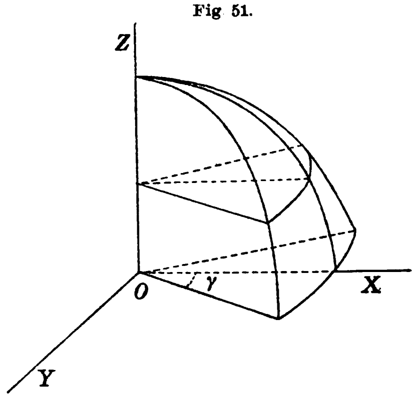
ist, in Bezug auf die yz-Ebene das statische Moment $\pi uv dx . x$, folglich ist das statische Moment des halben Ellipsoids

$$M_{yz} = \pi \int_0^a uv\, dx = \tfrac{1}{4}\pi a^2 bc;$$

also hat der auf der x-Achse liegende Schwerpunkt die Abscisse $\frac{3}{8}a$.

3. Ein halbes Kugelzweieck (Fig. 51) werde begrenzt durch zwei Meridiane einer Kugel vom Radius r, die den Neigungswinkel 2γ bilden. Nimmt man den Kugelmittelpunkt als Koordinatenanfang, die das ganze Kugelzweieck halbierende Äquatorebene als xy- und die Symmetrieebene des Zweiecks als xz-Ebene, so ist elementar bekannt, dass der Flächeninhalt des halben Zweiecks

Fig. 51.



$$S = 2\gamma r^2$$

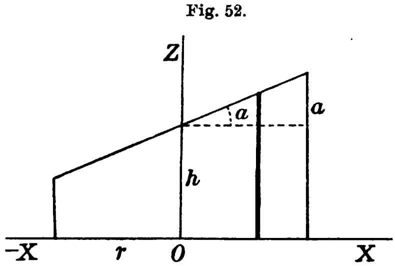
und sein statisches Moment in Bezug auf die xy-Ebene

$$M_{xy} = \gamma r^3$$

ist. Nimmt man ein Flächenelement parallel zur xy-Ebene im Abstand z, so ist

$$M_{yz} = 2r \sin\gamma \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2}.\, dz$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi r^3 \sin\gamma.$$

Fig. 52.



4. Ein gerader Kreiscylinder (Fig. 52), dessen Grundfläche den Radius r hat, ist abgestumpft durch eine Ebene, die auf der Achse h abschneidet und mit der Grundfläche den Winkel α bildet. Wählt man die Grundfläche als xy-Ebene, den Mittelpunkt der Grundfläche als Koordinatenanfang und den auf der Schnittfläche normalen

Achsenschnitt als xz-Ebene, so ist für ein zur xy-Ebene normales Volumenelement das statische Moment $2z\sqrt{r^2-x^2}\,dx\cdot\frac{1}{2}z$, wobei $z = h + x\tan\alpha$ ist, also ergiebt sich

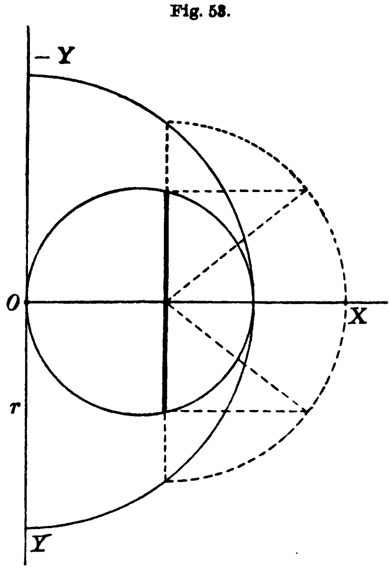
$$M_{xy} = \int\limits_{-r}^{r} z^2\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{8}\pi r^2(a^2+4h^2), \quad a = r\tan\alpha.$$

Der Schwerpunkt liegt auf der z-Achse im Abstand

$$\zeta = \tfrac{1}{2}h + \frac{a^2}{8h};$$

geht der Schnitt durch einen Punkt des Umfangs der Grundfläche, wo $a = h$ ist, so ist $\zeta = \frac{5}{8}h$.

Fig. 53.



5. In der xy-Ebene ist um den Koordinatenanfang ein Kreisquadrant mit dem Radius r beschrieben (Fig. 53), der um die x-Achse rotierend einen Kugelquadranten beschreibt. Um den auf der x-Achse liegenden Kugelradius als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben und über diesem als Grundfläche ein gerader Cylinder errichtet (vergl. § 17 Nr. 27). Man kann das statische Moment des zur x-Achse normalen Elementes des beiden Körpern gemeinsamen Volumens in Bezug auf die xy-Ebene bestimmen und findet

$$M_{xy} = \int\limits_{0}^{r}\left(r^2 - \tfrac{1}{3}rx - \tfrac{2}{3}x^2\right)\sqrt{x(r-x)}\,dx = \tfrac{5}{64}\pi r^4.$$

Das Volumenelement selbst ist

$$dV = \left[(r-x)\sqrt{rx} + (r^2-x^2)\arctan\sqrt{\frac{x}{r}}\right]dx,$$

also

$$V = \left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{4}{9}\right)r^3,$$

und

$$M_{yz} = \int\limits_{0}^{r}\left[(r-x)\sqrt{rx} + (r^2-x^2)\arctan\sqrt{\frac{x}{r}}\right]x\,dx = \tfrac{4}{15}r^4.$$

6. Sind die statischen Momente des von dem Cylinder ausgeschnittenen Teiles der Kugelfläche in Nr. 5 zu bestimmen, so hat man für das Flächenelement in einer zur x-Achse normalen Ebene das statische Moment in Bezug auf die xy-Ebene $2r\sqrt{x(r-x)}dx$, also ist

$$M_{xy} = 2r\int_0^r \sqrt{x(r-x)}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi r^3.$$

Das Flächenelement selbst ist

$$dS = 2r \operatorname{arctan}\sqrt{\frac{x}{r}}\,dx,$$

also

$$S = (\pi - 2)r^2;$$

folglich

$$M_{yz} = 2r\int_0^r x \operatorname{arctan}\sqrt{\frac{x}{r}}\,dx = \tfrac{2}{3}r^3.$$

VI. Guldinsche Regel. Hat die homogene Fläche in I in Bezug auf die x-Achse das statische Moment M_x und der Körper, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht, das Volumen V_x, so ist

$$V_x = 2\pi M_x.$$

Hat der homogene Bogen in II in Bezug auf die x-Achse das statische Moment M_x und die Fläche, die durch Rotation dieses Bogens um die x-Achse entsteht, den Inhalt T_x, so ist

$$T_x = 2\pi M_x.$$

Diese Sätze können als Probe für die Resultate in I und II dienen.

Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten r und θ gegeben, und rotiert der von der Kurve und den zu θ_0 und θ gehörigen Radienvektoren begrenzte Sektor um die Polarachse, so ist, wenn das statische Moment M_x des Sektors in Bezug auf die Polarachse bekannt ist, das Volumen des Rotationskörpers nach der Guldinschen Regel:

$$V = 2\pi M_x = \tfrac{2}{3}\pi\int_{\theta_0}^{\theta} r^3 \sin\theta\, d\theta.$$

In dieser Gestalt kommt der Satz vielfach zur Anwendung.

Z. B. 1. Das Flächenstück innerhalb der Kardioide

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

und ausserhalb der Parabel

$$r = \frac{2a}{1 + \cos\theta}$$

rotiert um die Polarachse; das Volumen des Rotationskörpers ist:

$$V = \tfrac{16}{3}\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1 + \cos\theta)^3}\right] = 18\pi a^3.$$

2. Die Fusspunktkurve der Ellipse $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ rotiert um die Polarachse; das entstehende Volumen ist (vergl. § 17 Nr. 16):

$$V = \tfrac{4}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^3}\,.\,\sin\theta\, d\theta$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{6}a(2a^2 + 3b^2) + \frac{b^4}{2c}\, l\left(\frac{a+c}{b}\right)\right], \quad \sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

3. Die Lemniskate $r^2 = a^2\cos 2\theta$ rotiert um die Polarachse; es entsteht das Volumen

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\cos^3 2\theta}\,.\,\sin\theta\, d\theta = \tfrac{1}{6}\pi\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\, l(\sqrt{2} + 1) - 1\right] a^3.$$

§ 21.

Trägheitsmomente.

Als elementar bekannt wird vorausgesetzt, dass das (mathematische) Trägheitsmoment einer homogenen Rechteckfläche mit den Seiten a und b und der Dichtigkeit 1 bezogen auf die Seite a ist: $\frac{1}{3}ab^3$ und das Trägheitsmoment der homogenen Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b bezogen auf die Kathete a ist: $\frac{1}{12}ab^3$.

I. Das Flächenelement $y\,dx$ der homogenen ebenen Fläche, die von der Kurve $y = f(x)$, der Abscissenachse und den zu den Abscissen x_0 und x gehörigen Ordinaten begrenzt ist, hat in Bezug auf die x-Achse das Trägheitsmoment $\frac{1}{3}y^3\,dx$, in Bezug auf die y-Achse $y\,dx\,.\,x^2$; folglich sind die Trägheitsmomente der Fläche:

$$\mathsf{T}_x = \tfrac{1}{3}\int_{x_0}^{x} y^3\, dx, \quad \mathsf{T}_y = \int_{x_0}^{x} x^2 y\, dx.$$

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten r und θ gegeben, so hat das Flächenelement $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ des zwischen θ_0 und θ liegenden Sektors der Kurve in Bezug auf die als Polarachse genommene x-Achse das Trägheitsmoment

$$\tfrac{1}{4} y^2 (y\,dx - x\,dy) = \tfrac{1}{4} r^4 \sin^2\theta\, d\theta,$$

mithin ist das Trägheitsmoment des Sektors

$$T_x = \tfrac{1}{4} \int_{\theta_0}^{\theta} r^4 \sin^2\theta\, d\theta;$$

also in Bezug auf die y-Achse:

$$T_y = \tfrac{1}{4} \int_{\theta}^{\theta} r^4 \cos^2\theta\, d\theta.$$

Kennt man die beiden (achsialen) Trägheitsmomente T_x und T_y, so ist das (polare) Trägheitsmoment der Fläche bezogen auf die durch den Koordinatenanfang gehende zur Fläche normale Achse

$$T_0 = T_x + T_y.$$

Beispiele. 1. Parabel $y^2 = 2px$; für die Fläche über der Abscisse x ist

$$T_x = \tfrac{2}{15} x y^3, \quad T_y = \tfrac{2}{7} x^3 y.$$

2. Die Fläche der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hat die Trägheitsmomente:

$$T_x = \tfrac{1}{4} \pi a b^3, \quad T_y = \tfrac{1}{4} \pi a^3 b, \quad T_0 = \tfrac{1}{4} \pi a b (a^2 + b^2).$$

Das Trägheitsmoment der Kreisfläche mit dem Radius r auf einen Durchmesser bezogen ist daher $\frac{1}{4}\pi r^4$, in Bezug auf die durch den Mittelpunkt gehende, zur Kreisfläche normale Achse $\frac{1}{2}\pi r^4$.

3. Kreissektor: Radius r, Centriwinkel 2φ. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Symmetrieachse ist:

$$T_x = \tfrac{1}{4} r^4 (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi),$$

in Bezug auf den zur Sehne parallelen Durchmesser:

$$T_y = \tfrac{1}{4} r^4 (\varphi + \sin\varphi \cos\varphi).$$

4. Kreissegment: Radius r, Centriwinkel 2φ. Bezogen auf die Symmetrieachse ist

$$T_x = r^4 \left(\tfrac{1}{4}\varphi - \tfrac{1}{6}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{48}\sin 4\varphi\right)$$
$$= \tfrac{1}{4} r^4 \left(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi\right),$$

bezogen auf den zur Sehne parallelen Durchmesser:

$$T_y = r^4 \left(\tfrac{1}{4}\varphi - \tfrac{1}{16}\sin 4\varphi\right) = \tfrac{1}{4} r^4 \left(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + 2\sin^3\varphi\cos\varphi\right).$$

5. Astroide: $x = a\,cos^3\psi$, $y = a\,sin^3\psi$. Die ganze Fläche hat die Trägheitsmomente:

$$T_x = T_y = \tfrac{21}{512}\pi a^4,\quad T_0 = \tfrac{21}{256}\pi a^4.$$

6. Cykloide. Nimmt man die Symmetrieachse eines Cykloidenzugs als y-Achse, so ist

$$x = b(\pi - \omega + sin\,\omega),\quad y = b(1 - cos\,\omega);$$

dann hat man für die Fläche des halben Cykloidenzugs:

$$T_x = \tfrac{35}{24}\pi b^4,\quad T_y = (\tfrac{1}{2}\pi^2 - \tfrac{35}{24})\pi b^4,\quad T_0 = \tfrac{1}{2}\pi^3 b^4.$$

7. Lemniskate: $r^2 = a^2 cos\,2\theta$; für die Fläche des Quadranten erhält man:

$$T_x = \frac{3\pi - 8}{192}a^4,\quad T_y = \frac{3\pi + 8}{192}a^4,\quad T_0 = \tfrac{1}{32}\pi a^4.$$

II. Das Element ds des homogenen Bogens der ebenen Kurve $y = f(x)$ hat in Bezug auf die x-Achse das Trägheitsmoment $ds\,.\,y^2$, in Bezug auf die y-Achse $ds\,.\,x^2$; mithin sind die Trägheitsmomente des Bogens

$$T_x = \int_{x_0}^{x} y^2\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx,\quad T_y = \int_{x_0}^{x} x^2\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx.$$

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten r und θ gegeben, so hat man

$$T_x = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot sin^2\theta\,d\theta,\quad T_y = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot cos^2\theta\,d\theta.$$

Beispiele. 1. Eine Strecke von der Länge a bildet mit der x-Achse den Winkel α und ein Endpunkt liegt im Abstand e vom Koordinatenanfang auf der y-Achse; dann ist $y = x\,tan\,\alpha + e$, also

$$T_x = sec\,\alpha\int_0^{a\,cos\,\alpha}(x\,tan\,\alpha + e)^2 dx = \tfrac{1}{3}a^3 sin^2\alpha + a^2 e\,sin\,\alpha + a e^2.$$

2. Kreisbogen: Radius r, Centriwinkel 2φ; dann ist bezogen auf die Symmetrieachse:

$$T_x = r^3(\varphi - sin\,\varphi\,cos\,\varphi);$$

bezogen auf den Durchmesser, der zur Sehne parallel ist:

$$T_y = r^3(\varphi + sin\,\varphi\,cos\,\varphi).$$

3. Parabelbogen vom Scheitel bis zum Punkte xy; ist $u = \sqrt{p^2 + y^2}$, so hat man:

$$\mathsf{T}_x = \tfrac{1}{8}\left[\frac{uy}{p}(u^2 + y^2) - p^3 l\left(\frac{u + y}{p}\right)\right],$$

$$\mathsf{T}_y = \tfrac{1}{64}\left[\frac{uy}{p}\left(\frac{8u^2y^2}{3p^2} - u^2 - y^2\right) + p^3 l\left(\frac{u + y}{p}\right)\right].$$

4. Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; für den Quadrantenbogen ergiebt sich $\mathsf{T}_x = \mathsf{T}_y = \frac{3}{8}a^3$.

5. Für den Cykloidenzug erhält man $\mathsf{T}_x = \frac{128}{15}b^3$.

III. Die homogene Fläche in I rotiert um die x-Achse. Ein zur x-Achse normales Volumenelement hat auf sie bezogen das Trägheitsmoment $\frac{1}{2}\pi y^4 dx$, mithin ist

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}\pi\int_{x_0}^{x} y^4 dx.$$

Beispiele. 1. Gerader Kreiskegel: Radius der Grundfläche r, Höhe h, hat in Bezug auf seine Achse das Trägheitsmoment $\frac{1}{10}\pi r^4 h$.

2. Parabel $y^2 = 2px$; die Fläche über der Abscisse x rotiert um die x-Achse, das Trägheitsmoment des Rotationsparaboloids bezogen auf seine Achse ist $\frac{1}{6}\pi xy^4$.

3. Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert um die grosse Achse $2a$; das Trägheitsmoment des Rotationsellipsoids bezogen auf diese Achse ist $\frac{8}{15}\pi ab^4$.

4. Kugelsegment: Kugelradius r, Höhe h, Radius des Grundkreises ϱ. Ist $y^2 = 2rx - x^2$, so ist das Trägheitsmoment bezogen auf die Rotationsachse:

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^h (2rx - x^2)^2 dx = \tfrac{1}{30}\pi h^3(3h^2 - 15rh + 20r^2)$$
$$= \tfrac{1}{60}\pi h(h^4 + 5h^2\varrho^2 + 10\varrho^4).$$

5. Eine Ellipse, Halbachsen a und b rotiert um eine zur grossen Achse $2a$ parallele Achse, die von ihr den Abstand $e \geqq b$ hat. Ist

$$y_1 = e + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = e - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

so findet man das Trägheitsmoment des Ringvolumens bezogen auf die Rotationsachse

$$\mathsf{T} = \pi\int_0^a (y_1{}^4 - y_2{}^4)\, dx = 2\pi^2 abe(\tfrac{3}{4}b^2 + e^2).$$

IV. Der homogene Bogen der Kurve $y = f(x)$ in II rotiert um die x-Achse. Das zur Rotationsachse normale Flächenelement hat in Bezug auf sie das Trägheitsmoment $2\pi y\, ds \,.\, y^2$, folglich ist das Trägheitsmoment der Rotationsfläche bezogen auf die Rotationsachse:

$$\mathsf{T} = 2\pi \int_{x_0}^{x} y^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Beispiele. 1. Mantel eines geraden Kegelstumpfs: Radien der Endflächen $r_1 > r_2$, Höhe h, Seitenlinie $s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$. Für die Achse des Kegels als x-Achse, die Spitze als Koordinatenanfang ist

$$y = r_1 - \frac{r_1 - r_2}{h} x,$$

und daher das Trägheitsmoment bezogen auf die x-Achse

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2} \pi s (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2).$$

2. Kugelzone. Der Bogen des Kreises $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ zwischen x_0 und x rotiert um die x-Achse; dann ist das Trägheitsmoment:

$$\mathsf{T} = 2\pi r [r^2(x - x_0) - \tfrac{1}{3}(x^3 - x_0^3)].$$

3. Kreisquadrant rotiert um die Tangente in einem Endpunkte. Ist diese Tangente x-Achse, die Tangente im andern Endpunkt y-Achse, so ist

$$y = r - \sqrt{2rx - x^2}$$

und das Trägheitsmoment der Rotationsfläche bezogen auf die x-Achse

$$\mathsf{T} = 2\pi r \int_0^r \frac{y^3}{\sqrt{2ry - y^2}} dy = \tfrac{1}{6}\pi (15\pi - 44) r^4.$$

4. Bogen der Parabel $y^2 = 2px$ zwischen Scheitel und dem Punkt xy rotiert um die Parabelachse; das Trägheitsmoment der Kappe des Paraboloids bezogen auf die Achse ist

$$\mathsf{T} = \tfrac{2}{15}\pi \left(3\frac{u^5}{p} - 5pu^3 + 2p^4\right), \quad u = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

V. Das Trägheitsmoment eines homogenen Raumgebildes in Bezug auf eine Achse lässt sich durch ein einfaches Integral ausdrücken, wenn man das Trägheitsmoment eines Elementes in Bezug auf diese Achse bestimmen kann. Hierbei kommt häufig der ele-

mentar bekannte Satz zur Anwendung: Ist T_s das Trägheitsmoment eines Raumgebildes bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, so ist das Trägheitsmoment bezogen auf eine zu ihr im Abstand a parallele Achse $T = T_s + Ma^2$, wobei M die Masse des Raumgebildes (Dichtigkeit $= 1$) ist.

Beispiele. 1. Ein Tetraeder hat drei rechtwinklig aneinanderstossende Kanten a, b, c. Nimmt man diese als Koordinatenachsen, so hat ein zur x-Achse normales Volumenelement im Abstand x vom Koordinatenanfang das Trägheitsmoment

$$\frac{1}{12}\,\frac{bc(b^2+c^2)}{a^4}(a-x)^4\,dx,$$

mithin ist

$$T_a = \tfrac{1}{60}\,abc\,(b^2+c^2).$$

2. Trägheitsmoment des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, bezogen auf die x-Achse. Wenn

$$u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \quad v^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

ist, so hat das Volumenelement normal zur x-Achse nach I Nr. 2 das Trägheitsmoment $\frac{1}{4}\pi uv(u^2+v^2)\,dx$, folglich

$$T_x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^a uv(u^2+v^2)\,dx = \tfrac{4}{15}\pi\,abc\,(b^2+c^2).$$

3. Trägheitsmoment des Rotationscylinders, bezogen auf eine Achse, die normal zur Cylinderachse durch den Schwerpunkt geht. Radius der Grundfläche r, Höhe h. Nimmt man die Cylinderachse als x-, die Momentenachse als y-Achse, so hat ein Volumenelement normal zur x-Achse das Trägheitsmoment

$$\tfrac{1}{4}\pi r^4 dx + \pi r^2 dx\,.\,x^2,$$

also ist

$$T_y = \tfrac{1}{12}\pi r^2 h\,(3r^2+h^2).$$

4. Trägheitsmoment des Rotationskegels, bezogen auf eine Achse, die normal zur Kegelachse durch die Spitze geht. Radius der Grundfläche r, Höhe h. Ist die Kegelachse x-, die Momentenachse y-Achse, so hat ein Volumenelement normal zur x-Achse das Trägheitsmoment $\frac{1}{4}\pi y^4 dx + \pi y^2 dx\,.\,x^2$, wenn $y = \frac{r}{h}x$ ist, folglich ist

$$T_y = \tfrac{1}{20}\pi r^2 h\,(r^2+4h^2).$$

5. In der xy-Ebene ist um den Koordinatenanfang ein Kreisquadrant mit dem Radius r beschrieben, der um die x-Achse rotierend einen Kugelquadranten beschreibt. Um den auf der x-Achse liegenden Kugelradius als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben und über diesem als Grundfläche ein gerader Cylinder errichtet (vergl. § 20 V, Nr. 5). Man kann das Trägheitsmoment des zur x-Achse normalen Elements des durch den Cylinder ausgeschnittenen Teiles der Kugelfläche in Bezug auf die x- und die z-Achse bestimmen und findet:

$$T_x = 2r\int_0^r (r^2 - x^2)\, arctan\sqrt{\frac{x}{r}}\, dx = \tfrac{2}{9}(3\pi - \tfrac{32}{5})\, r^4,$$

$$T_z = r\int_0^r \left[(r^2 + x^2)\, arctan\sqrt{\frac{x}{r}} - (r - x)\sqrt{rx}\right] dx = \tfrac{2}{9}(3\pi - 7)\, r^4.$$

6. Kennt man die Trägheitsmomente T_x und T_y einer homogenen ebenen Fläche in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Achsen ihrer Ebene, so ist das Trägheitsmoment der Fläche bezogen auf eine ausserhalb der Ebene liegende durch den Schnittpunkt der beiden Achsen gehende Achse, deren Projektion die x-Achse ist und die mit der x-Achse den Winkel α bildet

$$T_\alpha = T_x + T_y \,.\, sin^2\alpha.$$

Z. B. Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Radius r bezogen auf eine durch den Mittelpunkt gehende Achse, die mit der Ebene des Kreises den Winkel α bildet, ist $\frac{1}{4}\pi r^4(1 + sin^2\alpha)$.

Daraus folgt: das Trägheitsmoment eines schiefen Kreiscylinders, dessen Grundfläche den Radius r hat und dessen Achse a den Neigungswinkel α mit der Grundfläche bildet, in Bezug auf die Achse ist $\frac{1}{4}\pi a r^4 \sin\alpha\,(1 + sin^2\alpha)$.

Das Trägheitsmoment eines schiefen Kreiskegels, dessen Grundfläche den Radius r hat und dessen Achse a den Neigungswinkel α mit der Grundfläche bildet, in Bezug auf die Achse ist $\frac{1}{20}\pi a r^4 \sin\alpha\,(1 + sin^2\alpha)$.

Kapitel V.

Einfache bestimmte Integrale.

§ 22.

Transformationen bestimmter Integrale.

I. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ist nach § 10, I der Grenzwert, gegen den die Summe

$$[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta,$$

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

konvergiert, wenn n unendlich gross wird. Geometrisch bedeutet es nach § 11, 1) den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = f(x)$, dem Stück $b - a$ der Abscissenachse und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird.

In dem Falle, dass das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

gefunden worden ist, hat man, vorausgesetzt, dass $F(x)$ in dem Intervalle von a bis b endlich und stetig bleibt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

woraus folgt

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Auf ein bestimmtes Integral lassen sich die Regeln der Integration durch Zerlegung und der partiellen Integration anwenden.

II. Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = 0$ stetig bleibt, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f[a+\varepsilon\,(b-a)], \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Für $b = a$ folgt hieraus, dass ein zwischen den gleichen Grenzen a und a genommenes Integral im allgemeinen verschwindet, ausgenommen, wenn $f(a)$ unendlich wird. Einen Ausnahmefall dieser Art bildet z. B. das Integral

$$\int_\delta^{2\delta} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2\delta},$$

welches für $\delta = 0$ nicht verschwindet, sondern unendlich gross wird.

Ein zweites Beispiel liefert das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(c+x)\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(c+a)(c+b)}};$$

für $b = a$ wird dasselbe nicht $= 0$ sondern $= \pi : (c+a)$.

III. Bezeichnet $\psi(x)$ eine Funktion, welche von $x = a$ bis $x = b$ stetig und zugleich positiv bleibt, so ist allgemeiner

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi[a+\varepsilon\,(b-a)]\int_a^b \psi(x)\,dx, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Beispielsweise ist hiernach

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \varphi[a+\varepsilon\,(b-a)]\,.\,\pi,$$

woraus u. a. folgt, dass das Integral für $b = a$ nicht verschwindet, sondern den Wert $\pi\varphi(a)$ annimmt. Dies ist eine Verallgemeinerung des zweiten Beispiels in II.

Aus der anfangs erwähnten allgemeinen Formel ergiebt sich ferner

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(c^2+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2\varepsilon^2}}\left\{l\left(\frac{2}{c}\right) + l\left(\frac{1+\sqrt{c^2+1}}{2}\right)\right\};$$

für $c = 0$ wird $\sqrt{1 + c^2 \varepsilon^2} = 1$ und $l\left(\frac{1 + \sqrt{c^2 + 1}}{2}\right) = 0$, woraus folgt, dass das Integral für $c = 0$ in demselben Maße unendlich wird, wie $l\left(\frac{2}{c}\right)$, dass also für sehr kleine c näherungsweise

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 + c^2 x^2)(c^2 + x^2)}} = l\left(\frac{2}{c}\right)$$

gesetzt werden darf.

Auf gleichem Wege findet man die allgemeinere Näherungsformel

$$\int_0^1 \frac{f(cx)\,dx}{\sqrt{c^2 + x^2}} = f(0)\, l\left(\frac{2}{c}\right).$$

Zur Abkürzung sei $a + \varepsilon(b - a) = \mu$, ferner habe $\varphi(x)$ die Eigenschaft $\varphi(0) = 0$; die analoge Gleichung

$$\int_a^b \varphi(\varkappa x)\, \psi(x)\, dx = \varphi(\varkappa \mu) \int_a^b \psi(x)\, dx, \quad a < \mu < b,$$

dient dann zur Beantwortung der Frage, ob das Integral verschwindet, sobald der konstante Koeffizient $\varkappa$ in Null übergeht. Bei endlichen a und b ist μ gleichfalls endlich, mithin für $\varkappa = 0$ auch $\varkappa\mu = 0$ und $\varphi(\varkappa\mu) = 0$; das rechter Hand stehende Produkt verschwindet dann sicher, wenn

$$\int_a^b \psi(x)\, dx$$

einen endlichen Wert besitzt; im Gegenfalle erhält jenes Produkt die unbestimmte Form $0 . \infty$, welche näherer Untersuchung bedarf. So verschwindet z. B. das Integral

$$\int_0^1 l\left(\frac{1}{1 - \varkappa x}\right) \frac{1}{x^3}\, dx$$

nicht für $\varkappa = 0$, denn sein Wert beträgt mehr als

$$\varkappa \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \varkappa . \infty.$$

Ist zweitens eine der Integrationsgrenzen a und b unendlich gross, so kann μ gleichfalls unendlich gross sein, und dann lässt sich nicht einmal behaupten, dass $\varkappa\mu = 0$ werde und demgemäss $\varphi(\varkappa\mu)$ verschwinde. Derartige Fälle müssen besonders untersucht werden.

IV. Sind α, β, γ, ... μ beliebige, zwischen a und b in der Weise eingeschaltete Grössen, dass

$$a < \alpha < \beta < \gamma < \ldots < \mu < b,$$

so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \cdots + \int_\mu^b f(x)\,dx,$$

welche Operation die Zerlegung des Integrals durch Teilung des Integrationsintervalls genannt wird.

Die genannte Zerlegung dient u. a. zur Berechnung des Integralwertes für den Fall, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles Unterbrechungen der Kontinuität erleidet. Wird $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ nur einmal und zwar an der Stelle $x = \varkappa$ diskontinuierlich, so betrachtet man das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als den Grenzwert, dem sich die Summe

$$\int_a^{\varkappa-\delta_1} f(x)\,dx + \int_{\varkappa+\delta_2}^b f(x)\,dx$$

bei verschwindenden δ_1 und δ_2 nähert; dies giebt, wenn

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

gesetzt wird,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + Lim\{F(\varkappa - \delta_1) - F(\varkappa + \delta_2)\}$$

und ähnlich bei mehreren Unterbrechungen der Kontinuität. Der für $\delta_1 = \delta_2$ entstehende Wert des Integrals heisst der Hauptwert des letzteren.

Desselben Verfahrens bedient man sich, wenn man bei der unbestimmten Integration für $F(x)$ eine unstetige Funktion erhalten hat. So ist z. B.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = arctan\, \frac{2\sqrt{x}}{1-x} + Const.;$$

wollte man aber hieraus ohne weiteres

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 0$$

schliessen, so wäre dies unrichtig und auf folgende Weise zu verbessern:

$$\int_0^{1-\delta_1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_{1+\delta_2}^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = arctan\, \frac{2\sqrt{1-\delta_1}}{\delta_1} + arctan\, \frac{2\sqrt{1+\delta_2}}{\delta_2},$$

mithin für $\delta_1 = \delta_2 = 0$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi,$$

wie man auch durch die zweckmässigere Integralformel

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\, arctan \sqrt{x} + Const.$$

verifizieren kann.

V. Die Substitution neuer Variablen wird bei bestimmten Integralen im allgemeinen ebenso wie bei unbestimmten Integralen ausgeführt, nur hat man zur Vermeidung von Restitutionen auf die Veränderungen zu achten, welche die Integrationsgrenzen erleiden. Wenn die Gleichung $\varphi(x) = y$, nach x aufgelöst, nur einen einzigen Wert $x = \psi(y)$ giebt, so ist

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, \psi'(y)\, dy.$$

Wenn dagegen die Gleichung $\varphi(x) = y$ zwei verschiedene Ausdrücke $x = \psi(y)$ und $x = \chi(y) > \psi(y)$ liefert, so ist dies ein Zeichen, dass y, als Funktion von x betrachtet, ein Maximum oder Minimum besitzt. Tritt dasselbe an der Stelle $x = \mu$ ein und ist zugleich $a < \mu < b$, so entsprechen jedem y zwei x, von denen das eine weniger, das andere mehr als μ beträgt; man hat daher die erste Wurzel $x = \psi(y)$ im Falle $x < \mu$, die zweite $x = \chi(y)$ im Falle $x > \mu$ zu substituieren. Um die Fälle zu trennen, zerlegt man erst wie folgt:

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_a^\mu f[\varphi(x)]\,dx + \int_\mu^b f[\varphi(x)]\,dx$$

und erhält nachher durch die angedeuteten Substitutionen

$$\int_a^b f[\varphi(x)\,dx] = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\mu)} f(y)\,\psi'(y)\,dy + \int_{\varphi(\mu)}^{\varphi(b)} f(y)\,\chi'(y)\,dy.$$

Ganz ähnlich hat man zu verfahren, wenn $\varphi(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ mehrere Maxima und Minima besitzt, mithin aus $\varphi(x) = y$ drei oder mehr Werte für x folgen.

Beispiele. 1. Benutzt man die Substitution

$$\sqrt{x^2+1} - x = y$$

und beachtet, dass y verschwindet für $x = \infty$, so erhält man

$$\int_\lambda^\infty (\sqrt{x^2+1} - x)^p\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda} (y^{p-2} + y^p)\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda)^{p-1}}{p-1} + \frac{(\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda)^{p+1}}{p+1}\right\}, \qquad p > 1.$$

2. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\int_\lambda^\infty (x - \sqrt{x^2-1})^p\,dx = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})^{p-1}}{p-1} - \frac{(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})^{p+1}}{p+1}\right\},$$
$$p > 1.$$

3. Die Substitution

$$\frac{\beta x}{\alpha + \beta x} = y$$

führt zu der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(\alpha+\beta x)^{p+q}} = \frac{1}{\alpha^q\beta^p}\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy.$$

Im speziellen Falle eines ganzen positiven p wird nach § 10 Nr. 29

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(\alpha+\beta x)^{p+q}} = \frac{1.2.3\ldots(p-1)}{q(q+1)(q+2)\ldots(q+p-1)}\cdot\frac{1}{\alpha^q\beta^p}.$$

Setzt man in der vorhergehenden Formel

$$p = \tfrac{1}{2}(m+1), \quad q = \tfrac{1}{2}, \quad x = \xi^2, \quad y = \eta^2,$$

so erhält man unter Rücksicht auf die Formeln 32) und 33) des § 10

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}},\ \text{für gerade } m.$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{2.5.7\ldots\ldots m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}},\ \text{für ungerade } m.$$

Für $\xi = \frac{1}{\zeta}$ wird

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{\frac{1}{2}m+1}} = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(\alpha\zeta^2+\beta)^{\frac{1}{2}m+1}},$$

man hat also zugleich zwei Formeln für das auf der rechten Seite stehende Integral.

4. Wendet man die Substitution

$$\frac{2x}{1+x^2} = y$$

an und beachtet, dass dem Werte $x=1$ ein Maximum von y entspricht, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(1+x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2^m}\int_0^1 \frac{y^m\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

und ferner, wenn

$$x = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\xi,\quad \alpha>0,\quad \beta>0$$

gesetzt wird,

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{m+1}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2^{m+1}\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}},\quad m \text{ gerade}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{m+1}} = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}\cdot\frac{1}{2^m\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}},\quad m \text{ ungerade}.$$

5. Für $\xi = \tan\theta$ gehen aus den Formeln in Nr. 3 und 4 die folgenden hervor:

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^m\theta\,d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}},$$

m gerade.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^m\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}}.$$

m ungerade.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^m\theta\cos^m\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{m+1}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2^{m+1}\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}},$$

m gerade.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^m\theta\cos^m\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{m+1}} = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}\cdot\frac{1}{2^{m}\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}},$$

m ungerade.

6. Transformiert man das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(\frac{1}{x}+2\varkappa+x\right)^p\sqrt{x}}$$

mittels der Substitution

$$x+\frac{1}{x}=2y$$

und beachtet einerseits, dass y für $x=1$ ein Minimum erreicht, sowie andererseits, dass die identische Gleichung

$$\sqrt{y-\sqrt{y^2-1}}+\sqrt{y+\sqrt{y^2-1}}=\sqrt{2(y+1)}$$

stattfindet, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}}\,dx}{(1+2\varkappa x+x^2)^p} = \frac{\sqrt{2}}{2^p}\int_1^\infty \frac{dy}{(\varkappa+y)^p\sqrt{y-1}}$$

und für $y=1+\zeta^2$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}}\,dx}{(1+2\varkappa x+x^2)^p} = \frac{1}{2^{p-\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\varkappa+\zeta^2)^p}.$$

Durch Substitution von

$$p=\tfrac{1}{2}m+1,\quad x=\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot z^2,\quad \varkappa=\frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

ergiebt sich ferner

$$\int_0^\infty \frac{z^{m+2}\,dz}{(a+bz^2+cz^4)^{\frac{1}{2}m+1}} = \sqrt[4]{\frac{4a}{c}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(2\sqrt{ac}\,.\,\zeta^2+b+2\sqrt{ac})^{\frac{1}{2}m+1}},$$

wobei sich für jedes ganze m das rechts stehende Integral nach der letzten Formel in Nr. 3 entwickeln lässt.

Setzt man $\frac{1}{z}$ statt z und vertauscht a und c gegen einander, so erhält man noch

$$\int_0^\infty \frac{z^m\,dz}{(a+bz^2+cz^4)^{\frac{1}{2}m+1}} = \sqrt[4]{\frac{4c}{a}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(2\sqrt{ac}\,.\,\zeta^2+b+2\sqrt{ac})^{\frac{1}{2}m+1}}.$$

Für $m=0$ und $m=2$ führen die beiden letzten Formeln zu den in § 10 unter Nr. 15, 16, 18 und 19 angegebenen Resultaten.

7. Zerlegt man das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,lx\,dx}{(1+\varkappa x+x^2)^p}$$

in zwei, bezüglich von 0 bis 1 und von 1 bis ∞ gehende Integrale und setzt im ersten dieser Integrale $x=y$, im zweiten $x=\frac{1}{y}$, so findet man, dass der Wert des ursprünglichen Integrals $=0$ ist. Für

$$x=\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot z, \quad \varkappa=\frac{b}{\sqrt{ac}}$$

folgt hieraus bei positiven, von Null verschiedenen a und c

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,lz\,dz}{(a+bz+cz^2)^p} = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{a}{c}\right)\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{(a+bz+cz^2)^p}$$

also z. B.

$$\int_0^\infty \frac{lz\,dz}{a+bz+cz^2} = \frac{la-lc}{\sqrt{4ac-b^2}}\,arctan\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}, \quad 4ac-b^2>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{z\,lz\,dz}{(a+bz+cz^2)^2} = \frac{la-lc}{4ac-b^2}\left\{1-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\,arctan\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}\right\};$$

$$\int_0^\infty \frac{z^m\, lz\, dz}{(a+cz^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m} \cdot \frac{\pi(la-lc)}{2^{m+2}\sqrt{a^{m+1}c^{m+1}}}, \quad \text{für gerade } m,$$

$$= \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m} \cdot \frac{la-lc}{2^{m+1}\sqrt{a^{m+1}c^{m+1}}}, \quad \text{für ungerade } m.$$

8. Um

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l(1+\tan\theta)\, d\theta$$

zu bestimmen, setze man $\theta = \frac{1}{4}\pi - \varphi$, dann ist

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l[1+\tan(\tfrac{1}{4}\pi - \varphi)]\, d\varphi = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l\left(\frac{2}{1+\tan\varphi}\right) d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi\, l2 - J,$$

folglich

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} l(1+\tan\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{8}\pi\, l2.$$

9. Ist

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\theta\, d\theta,$$

so ist auch, wenn man $\frac{1}{2}\pi - \theta$ an Stelle von θ setzt:

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\cos\theta\, d\theta,$$

und für $\theta = \frac{1}{2}\varphi$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin 2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\varphi\, d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi\right) = J.$$

Daher ist

$$2J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (l\sin 2\theta - l2)\, d\theta = J - \tfrac{1}{2}\pi\, l2,$$

folglich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\cos\theta\, d\theta = -\tfrac{1}{2}\pi\, l2$$

und

$$\int_0^{\pi} l\sin\theta\, d\theta = -\pi\, l2.$$

Durch partielle Integration erhält man noch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \theta \cot\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi \, l\, 2.$$

10. Es sei

$$J = \int_0^{\pi} \theta \, l \sin\theta \, d\theta;$$

setzt man $\theta = \pi - \varphi$, so wird

$$J = \int_0^{\pi} (\pi - \varphi) \, l \sin\varphi \, d\varphi = -\pi^2 l\, 2 - J,$$

also

$$\int_0^{\pi} \theta \, l \sin\theta \, d\theta = -\tfrac{1}{2}\pi^2 l\, 2.$$

11. Setzt man

$$a = h\cos\gamma, \quad b = h\sin\gamma, \quad h = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so ist identisch

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[h\cos(\theta - \gamma) + c]^m}$$

und für $\theta - \gamma = \eta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = \int_{-\gamma}^{2\pi - \gamma} \frac{d\eta}{(h\cos\eta + c)^m}.$$

Man zerlege nun das Integral rechter Hand nach dem Schema

$$\int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} = \int_{-\gamma}^{0} + \int_{0}^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} - \int_{2\pi-\gamma}^{2\pi}$$

und substituiere im ersten Integral $\eta = -\zeta$, im zweiten $\eta = +\zeta$, im dritten und vierten $\eta = 2\pi - \zeta$; dies giebt

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\zeta}{(h\cos\zeta + c)^m};$$

endlich für

$$c + \sqrt{a^2 + b^2} = \alpha^2, \quad c - \sqrt{a^2 + b^2} = \beta^2, \quad \zeta = 2\omega,$$

wobei $a^2 + b^2 < c^2$ vorausgesetzt wird,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^m}.$$

Spezielle Fälle hiervon sind

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^2} = \frac{2\pi c}{\sqrt{(c^2 - a^2 - b^2)^3}}.$$

12. Nach demselben Verfahren erhält man die allgemeine Formel

$$\int_0^{2\pi} F(a\cos\theta + b\sin\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\pi} F(\sqrt{a^2 + b^2}.\cos\zeta)\, d\zeta.$$

13. Der Wert des Integrals

$$J = \int_0^{\pi} \sin 2m\omega \cot n\omega\, d\omega$$

lässt sich, wenn m und n ganze positive Zahlen bedeuten, auf folgendem Wege finden. Man substituiere zunächst $n\omega = \varphi$, zerlege das entstehende Integral

$$J = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \sin\frac{2m\varphi}{n} \cot\varphi\, d\varphi$$

nach dem Schema

$$\int_0^{n\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

und setze im ersten Integrale rechter Hand $\varphi = \psi$, im zweiten $\varphi = \pi + \psi$, im dritten $\varphi = 2\pi + \psi$ u. s. w.; das Resultat ist

$$J = \frac{A}{n}\int_0^{\pi} \sin\frac{2m\psi}{n} \cot\psi\, d\psi + \frac{B}{n}\int_0^{\pi} \cos\frac{2m\psi}{n} \cot\psi\, d\psi,$$

worin A und B folgende Bedeutungen haben:

$$A = 1 + \cos\frac{2m\pi}{n} + \cos\frac{4m\pi}{n} + \cos\frac{6m\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(2n-2)m\pi}{n},$$

$$B = \quad \sin\frac{2m\pi}{n} + \sin\frac{4m\pi}{n} + \sin\frac{6m\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(2n-2)m\pi}{n}.$$

Aus den im ersten Teile, § 35, Nr. 14 und 15 entwickelten Formeln ergiebt sich $\left(\text{für } x = 1 \text{ und } \theta = \frac{2m\pi}{n}\right)$, dass $A = n$ oder $= 0$ ist, je nachdem n in m aufgeht oder nicht, und dass B immer $= 0$ ist. Im zweiten Falle wird $J = 0$; im ersten sei $\frac{m}{n} = q$, also q eine ganze Zahl; die Gleichung

$$\sin 2q\psi \cot \psi = 1 + 2\{\cos 2\psi + \cos 4\psi + \cdots + \cos(2q-2)\psi\} + \cos 2q\psi$$

liefert dann $J = \pi$. Der Wert des Produktes

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2m\omega \cot n\omega \, d\omega$$

ist demnach $= 1$ oder $= 0$, je nachdem n in m aufgeht oder nicht.

14. Bezeichnet k eine ganze positive Zahl, so erhält man durch ein ganz ähnliches Verfahren

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin k\theta \, d\theta = \frac{1}{k}\int_0^\pi Z \sin \zeta \, d\zeta,$$

worin Z die folgende Bedeutung hat:

$$Z = f\left(\frac{\zeta}{k}\right) - f\left(\frac{\zeta+\pi}{k}\right) + f\left(\frac{\zeta+2\pi}{k}\right) - \cdots + (-1)^{k-1} f\left(\frac{\zeta+(k-1)\pi}{k}\right).$$

15. Nach derselben Methode findet man

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin^2 k\theta \, d\theta = \frac{1}{k}\int_0^\pi Z \sin^2 \zeta \, d\zeta,$$

worin Z durch die Gleichung

$$Z = f\left(\frac{\zeta}{k}\right) + f\left(\frac{\zeta+\pi}{k}\right) + f\left(\frac{\zeta+2\pi}{k}\right) + \cdots + f\left(\frac{\zeta+(k-1)\pi}{k}\right)$$

bestimmt ist.

§ 23.

Die Variation der Konstanten.

I. Wenn in einem bestimmten Integrale eine willkürliche Konstante r vorkommt, wie z. B. in der Gleichung

$$W = \int_a^b f(x, r)\, dx,$$

so hängt auch der Integralwert W von r ab und es kann daher W in Beziehung auf r differenziert werden. Unter der Voraussetzung, dass die Integrationsgrenzen a und b kein r enthalten, geschieht die Differentiation unter dem Integralzeichen mittels der Formel

$$\frac{dW}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r}\, dx;$$

wenn dagegen r auch in a und b vorkommt, so ist

$$\frac{dW}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r}\, dx + f(b, r)\frac{db}{dr} - f(a, r)\frac{da}{dr}.$$

Diese Formeln gelten jedoch nur unter der Bedingung, dass bei unendlich abnehmenden Δr und einem echt gebrochenen ε

$$Lim \left\{ \Delta r \int_a^b f_r''(x, r + \varepsilon \Delta r)\, dx \right\} = 0$$

ist, welcher Fall eintritt, wenn das Integral

$$\int_a^b f_r''(x, r)\, dx$$

einen endlichen Wert besitzt.

Man kann auch eine Integration unter dem Integralzeichen ausführen. Multipliziert man die Gleichung

$$W = \int_a^b f(x, r)\, dx$$

beiderseits mit dr und integriert dann in Beziehung auf r zwischen den Grenzen r_1 und r_2, so erhält man:

$$\int_{r_1}^{r_2} W dr = \int_a^b dx \,.\, \left[\int_{r_1}^{r_2} f(x, r)\, dr\right].$$

Durch Differentiation oder Integration unter dem Integralzeichen kann man aus bestimmten Integralen, deren Werte bekannt sind, neue herleiten.

Beispiele. 1. Aus

$$\int_0^1 x^\mu \, dx = \frac{1}{\mu+1}, \quad \mu > -1,$$

findet man durch Differentiation nach μ

$$\int_0^1 x^\mu \, lx \, dx = -\frac{1}{(\mu+1)^2}, \quad \mu > -1.$$

2. Nach § 10 Nr. 42 hat man

$$\int_0^\infty e^{-az} \, dz = \frac{1}{a}, \quad a > 0;$$

differenziert man n-mal in Bezug auf a, so erhält man

$$\int_0^\infty z^n e^{-az} \, dz = \frac{1.2.3 \ldots n}{a^{n+1}}, \quad a > 0$$

(vergl. § 10 Nr. 44).

3. Differenziert man (§ 10 Nr. 47)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\alpha^2 \cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}$$

nach α, so ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3\beta};$$

dagegen nach β differenziert:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\omega \, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta^3},$$

folglich durch Addition

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2 \cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3 \beta^3}$$

(vergl. § 10 Nr. 48).

4. Aus

$$\int_0^1 x^\mu \, dx = \frac{1}{\mu + 1}, \quad \mu > -1$$

erhält man, wenn man in Bezug auf μ zwischen den Grenzen 0 und μ integriert

$$\int_0^1 dx \, . \left[\int_0^\mu e^{\mu l x} \, d\mu \right] = \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu + 1},$$

also

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - 1}{lx} \, dx = l(\mu + 1), \quad \mu > -1.$$

5.

$$\int_0^\infty e^{-nx} \, dx = \frac{1}{n}$$

zwischen 1 und n in Bezug auf n integriert, liefert

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \, dx = ln.$$

6. Nach § 10, Nr. 55 hat man

$$\int_0^\infty e^{-au} \cos u \, du = \frac{a}{1 + a^2};$$

integriert man zwischen den Grenzen 0 und a in Bezug auf a, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-au}}{u} \cos u \, du = \tfrac{1}{2} \, l(1 + a^2).$$

7. Nach demselben Verfahren erhält man aus

$$\int_0^\infty e^{-au} \sin u \, du = \frac{1}{1+a^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-au}}{u} \sin u \, du = \operatorname{arctan} a.$$

Hieraus hat man für $a = \infty$

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2},$$

folglich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-au}}{u} \sin u \, du = \operatorname{arctan} \frac{1}{a}.$$

8. Aus dem unbestimmten Integral erhält man

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta \, d\theta}{1 - \varepsilon \cos\theta} = \pi \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \varepsilon^2 \leqq 1;$$

durch Integration in Bezug auf ε zwischen den Grenzen 0 und ε erhält man

$$\int_0^\pi l(1 - \varepsilon\cos\theta)\, d\theta = \pi \, l\left(\frac{1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\right), \quad \varepsilon^2 \leqq 1;$$

ebenso ist

$$\int_0^\pi l(1 + \varepsilon\cos\theta)\, d\theta = \pi \, l\left(\frac{1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\right), \quad \varepsilon^2 \leqq 1.$$

Durch Addition findet man, wenn $1 - \varepsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ gesetzt wird:

$$\int_0^\pi l(\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta)\, d\theta = 2\pi \, l\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

II. Durch Variation der Konstanten kann man oft den Wert eines bestimmten Integrals finden. Namentlich lässt sich ein numerisches Integral zuweilen dadurch bestimmen, dass man es zunächst durch Einführung willkürlicher Konstanten verallgemeinert und in Beziehung auf letztere differenziert.

Beispiele. 1. Um das numerische Integral

$$\int_0^\infty \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

zu bestimmen, betrachtet man das allgemeinere Integral

$$W = \int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{\lambda^2+\mu^2 x^2}\,dx.$$

Wegen $\lambda^2 + \mu^2 x^2 > \mu^2 x^2$, und weil der Ausdruck unter dem Integralzeichen immer positiv ist, hat man zunächst

$$0 < W < \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{x^2}\,dx;$$

mittels partieller Integration findet man weiter

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{x^2}\,dx = \pi\varkappa;$$

hieraus zusammen folgt, dass W einen endlichen, zwischen 0 und $\frac{\pi\varkappa}{\mu^2}$ liegenden Wert besitzt, der für $\varkappa = 0$ verschwindet. Differenziert man die ursprüngliche Gleichung in Beziehung auf $\varkappa$, so erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial \varkappa} = 2\varkappa \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+\varkappa^2 x^2)(\lambda^2+\mu^2 x^2)} = \frac{\pi}{\mu(\varkappa\lambda+\mu)},$$

mithin durch Integration

$$W = \frac{\pi}{\lambda\mu}\, l(\varkappa\lambda+\mu) + Const.$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich durch die Bemerkung, dass für $\varkappa = 0$ auch W verschwindet; die Zusammenstellung der ersten und letzten Form von W führt dann zu dem Integralwerte

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{\lambda^2+\mu^2 x^2}\,dx = \frac{\pi}{\lambda\mu}\, l\left(1+\frac{\varkappa\lambda}{\mu}\right),$$

woraus sich der Wert des numerischen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \pi\, l\, 2$$

ergiebt.

In dem speziellen Falle $\varkappa = \mu = 1$ kann man dem Integrale durch Substitution von $x = \cot\theta$ und $\lambda = \sqrt{1-\varepsilon^2}$ die folgende trigonometrische Form verleihen:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \varepsilon^2 \leq 1.$$

Schreibt man statt dieser Gleichung die mit ihr identische

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 z^2}} \cdot \frac{dz}{1+z},$$

entwickelt beide Seiten nach Potenzen von ε und vergleicht die Koeffizienten von ε^{2n}, so gelangt man zu der Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta \,.\, l \sin\theta\, d\theta = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} \int_0^1 \frac{z^{2n}\, dz}{1+z^2}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} \left\{ l\, 2 - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} - \cdots + \frac{1}{2n} \right\}.$$

Aus der allgemeinen Formel lassen sich durch mehrmalige Differentiationen in Beziehung auf λ oder μ noch viele andere Resultate ableiten; z. B.

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{(\lambda^2+\mu^2 x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2\lambda^3 \mu} \left\{ l\left(1+\frac{\varkappa\lambda}{\mu}\right) - \frac{\varkappa\lambda}{\varkappa\lambda+\mu} \right\}.$$

Mit Hilfe der identischen Gleichung

$$\frac{1}{x^2(\lambda^2+\mu^2 x^2)} = \frac{1}{\lambda^2}\left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2 x^2} \right\}$$

gelangt man leicht zu der Formel

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{x^2(\lambda^2+\mu^2 x^2)}\, dx = \frac{\pi}{\lambda^3} \left\{ \varkappa\lambda - \mu\, l\left(1+\frac{\varkappa\lambda}{\mu}\right) \right\},$$

die wieder folgende Anwendung gestattet.

Durch partielle Integration ergiebt sich

$$\int \frac{l(1+\alpha^2x^2).l(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx = -\frac{l(1+\alpha^2x^2).l(1+\beta^2x^2)}{3x^3}$$

$$+\frac{2}{3}\int\left\{\frac{\beta^2 l(1+\alpha^2x^2)}{1+\beta^2x^2}+\frac{\alpha^2 l(1+\beta^2x^2)}{1+\alpha^2x^2}\right\}\frac{dx}{x^2},$$

mithin nach der vorigen Formel

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\alpha^2x^2).l(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\{(\alpha+\beta)\alpha\beta+\alpha^3 l\alpha+\beta^3 l\beta-(\alpha^3+\beta^3)l(\alpha+\beta)\}$$

und spezieller für $\alpha=\beta=1$

$$\int_0^\infty\left[\frac{l(1+x^2)}{x^2}\right]^2 dx=\frac{4}{3}\pi(1-l\,2).$$

2. Handelt es sich um das numerische Integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctan} x}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{x},$$

so betrachte man vorerst das allgemeinere Integral

$$W=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctan}(\varkappa x)}{\lambda^2+\mu^2x^2}\cdot\frac{dx}{x};$$

wegen $\operatorname{arctan}(\varkappa x)<\varkappa x$ ist W positiv und kleiner als $\frac{\pi\varkappa}{2\lambda\mu}$, mithin für $\varkappa=0$ auch $W=0$. Durch Differentiation in Beziehung auf $\varkappa$ und nachherige Integration findet man leicht

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctan}(\varkappa x)}{\lambda^2+\mu^2x^2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2\lambda^2}l\left(1+\frac{\varkappa\lambda}{\mu}\right);$$

der Wert des ursprünglichen numerischen Integrals ist demnach $=\frac{1}{2}\pi\,l\,2$.

Differenziert man die vorstehende Gleichung nach λ, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctan}(\varkappa x)}{(\lambda^2+\mu^2x^2)^2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{4\lambda^4}\left\{2l\left(1+\frac{\varkappa\lambda}{\mu}\right)-\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa\lambda+\mu}\right\};$$

die Differentiation nach μ liefert dagegen ein sehr einfaches Resultat, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{x \,.\, arctan\,(\varkappa x)}{(\lambda^2 + \mu^2 x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4\lambda\mu^2} \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa\lambda + \mu}.$$

Mit Hilfe der partiellen Integration lassen sich hieraus noch folgende Resultate herleiten:

$$\int_0^\infty \frac{l\,(1 + \alpha^2 x^2) \,.\, arctan\,(\beta x)}{x^3}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\{\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2)\,l\,(\alpha + \beta) - \alpha^2 l\alpha + \beta^2 l\beta\},$$

$$\int_0^\infty \frac{arctan\,(\alpha x) \,.\, arctan\,(\beta x)}{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi l\left\{\frac{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\right\}$$

und spezieller für $\alpha = \beta = 1$, $arctan\,x = \theta$,

$$\int_0^\infty \left(\frac{arctan\,x}{x}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\theta}{sin\,\theta}\right)^2 d\theta = \pi l 2.$$

Auf analoge Weise gelangt man zu den nachstehenden Formeln:

3. $$\int_0^1 \frac{l\,(1 + \varkappa x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\,(1 + \varkappa\,sin^2\theta)\,d\theta = \pi l\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varkappa}}{2}\right),$$

woraus u. a. folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\,(\alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 sin^2\theta)\,d\theta = \pi l\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

(vergl. II, Beispiel 8).

4. $$\int_0^1 l\left(\frac{1 + \varkappa x}{1 - \varkappa x}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{1 + \varkappa\,sin\,\theta}{1 - \varkappa\,sin\,\theta}\right) sin\,\theta\,d\theta$$

$$= \pi\,\frac{1 - \sqrt{1 - \varkappa^2}}{\varkappa}.$$

5. $$\int_0^1 l\left(\frac{1 + \varkappa x}{1 - \varkappa x}\right)\frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{1 + \varkappa\,sin\,\theta}{1 - \varkappa\,sin\,\theta}\right)\frac{d\theta}{sin\,\theta} = \pi\,arcsin\,\varkappa.$$

6. $$\int_0^1 \frac{x \arctan(\varkappa x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\varkappa^2}-1}{\varkappa}.$$

7. $$\int_0^1 \frac{\arctan(\varkappa x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\,l\left(\varkappa + \sqrt{1+\varkappa^2}\right).$$

8. Aus der Gleichung

$$W = \int_a^b \frac{1}{x}\,e^{-tx}\,dx$$

erhält man durch Differentiation nach t

$$\frac{dW}{dt} = -\int_a^b e^{-tx}\,dx = \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t},$$

mithin

$$W = \int \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\,dt + Const.$$

Setzt man in beiden für W geltenden Formeln $t = h$, $t = 0$ und subtrahiert, so findet man

$$\int_a^b \frac{1-e^{-hx}}{x}\,dx = \int_0^h \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt,$$

oder

$$\int_0^h \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = l\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b \frac{1}{x}\,e^{-hx}\,dx.$$

Im Falle $a > 0$ und $b > 0$ liegt der Wert des rechter Hand vorkommenden Integrals zwischen den Grenzen

$$\int_a^b \frac{1}{a}\,e^{-hx}\,dx = \frac{e^{-ah}-e^{-bh}}{ah}$$

und

$$\int_a^b \frac{1}{b}\,e^{-hx}\,dx = \frac{e^{-ah}-e^{-bh}}{bh},$$

welche für $h = \infty$ verschwinden. Es ist daher (vgl. I Beispiel 5)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = l\left(\frac{b}{a}\right), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

9. Wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet und

$$W = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$$

gesetzt wird, so findet man durch eine der vorigen ganz analoge Rechnung

$$\int_0^{2n\pi} (1 - e^{-hx}) \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{arctan} h - \int_0^h \frac{e^{-2n\pi t}}{1 + t^2} dt$$

und für $h = \infty$

$$\int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi t}}{1 + t^2} dt.$$

Handelt es sich um das allgemeinere Integral

$$\int_0^\omega \frac{\sin x}{x} dx,$$

dessen obere Grenze kein Vielfaches von 2π ist, so kann immer $\omega = 2n\pi + \varrho$ gesetzt werden, wo der Rest ϱ weniger als 2π beträgt; ferner lässt sich die Zerlegung

$$\int_0^\omega = \int_0^{2n\pi+\varrho} = \int_0^{2n\pi} + \int_{2n\pi}^{2n\pi+\varrho}$$

und im letzten Integrale die Substitution $x = 2n\pi + y$ anwenden, wodurch entsteht

$$\int_0^\omega \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi t}}{1 + t^2} dt + \int_0^\varrho \frac{\sin y}{2n\pi + y} dy.$$

Wegen

$$0 < \frac{1}{1+t^2} < 1$$

liegt der Wert des ersten Integrals rechter Hand zwischen 0 und $\frac{1}{2n\pi}$; weil ferner $-1 < \sin y < +1$ ist, hat das zweite Integral einen zwischen

$$-l\left(1+\frac{\varrho}{2n\pi}\right) \quad \text{und} \quad +l\left(1+\frac{\varrho}{2n\pi}\right)$$

enthaltenen Wert; für $\omega = \infty$, d. h. $n = \infty$ wird nun (vgl. I Beispiel 7)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Die Substitution $x = \mu\theta$ giebt unter der Voraussetzung eines positiven μ

$$\int_0^\infty \frac{\sin \mu\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \mu > 0.$$

Beachtet man, dass

$$2\sin\alpha\theta\cos\beta\theta = \begin{cases} \sin(\alpha+\beta)\theta + \sin(\alpha-\beta)\theta, & \text{für } \beta < \alpha, \\ \sin 2\alpha\theta, & \text{für } \beta = \alpha, \\ \sin(\beta+\alpha)\theta - \sin(\beta-\alpha)\theta, & \text{für } \beta > \alpha, \end{cases}$$

so gelangt man zu der allgemeineren Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\theta\cos\beta\theta}{\theta}\,d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & \text{für } \beta < \alpha, \\ \frac{1}{4}\pi, & \text{für } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{für } \beta > \alpha, \end{cases}$$

die weder nach α noch in Beziehung auf β differenziert werden darf.

Durch partielle Integration ergiebt sich ferner

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\theta\sin\beta\theta}{\theta^2}\,d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\beta, & \text{für } \beta < \alpha, \\ \frac{1}{4}\pi(\beta+\alpha), & \text{für } \beta = \alpha, \\ \frac{1}{2}\pi\alpha, & \text{für } \beta > \alpha, \end{cases}$$

und hieraus wieder, gleichfalls durch partielle Integration,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\theta(1-\cos\beta\theta)}{\theta^3}\,d\theta = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi\beta^2, & \text{für } \beta \overline{\overline{<}} \alpha, \\ \frac{1}{4}\pi\alpha(2\beta-\alpha), & \text{für } \beta \geqq \alpha. \end{cases}$$

Diese Resultate lassen sich geometrisch auf folgende Weise veranschaulichen. Man betrachte die Gleichung

$$y = \frac{2h}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\theta \cos x\theta}{\theta}\, d\theta,$$

worin h eine positive Konstante bezeichnen möge, als Gleichung einer auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Kurve. Letztere besteht dann für $0 \leqq x < a$ aus einer in der Höhe h parallel zur x-Achse liegenden Geraden; für $x = a$ ändert sich die Linie sprungweise und hat einen isolierten Punkt mit den Koordinaten a und $\frac{1}{2}h$; für $x > a$ fällt die Kurve mit der x-Achse zusammen. Negativen x entsprechen dieselben Ordinaten wie gleich grossen positiven x.

Konstruiert man auf analoge Weise die Gleichung

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\theta \sin x\theta}{\theta^2}\, d\theta,$$

so erhält man von $x = 0$ bis $x = a$ eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade, welche die Abscissenachse unter einem halben rechten Winkel schneidet; von $x = a$ bis $x = \infty$ ist die Kurve in der Höhe a parallel zur Abscissenachse.

Die Kurve, deren Gleichung ist

$$y = \frac{2}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin a\theta\,(1 - \cos x\theta)}{\theta^3}\, d\theta,$$

fällt von $x = 0$ bis $x = a$ mit der Parabel $y = \frac{x^2}{2h}$ zusammen; für $x > a$ wird sie zu einer Geraden, die das vorige Parabelstück in seinem Endpunkte berührt.

10. Differenziert man das Integral

$$W = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin rx}{x}\, dx$$

in Beziehung auf r und beachtet, dass W gleichzeitig mit r verschwindet, so findet man (vgl. I Beispiel 7)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin rx}{x}\, dx = \operatorname{arctan}\frac{r}{a}.$$

11. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos rx\, dx,$$

welches für $r = 0$ in das unter Nr. 8 entwickelte Integral übergeht, lässt sich analog behandeln; sein Wert ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos rx\, dx = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}\right).$$

12. Mittels der Bemerkung, dass bei positiven z die Exponentialgrösse e^z positiv und $> 1 + z$ ist, findet man sofort

$$0 < \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz < \int_0^\infty \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} dz;$$

das in der Mitte stehende Integral besitzt demnach einen zwischen 0 und π liegenden, d. h. einen endlichen positiven Wert, der A heissen möge. Setzt man in der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = A$$

$z = ky$, so findet man noch

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky}}{\sqrt{y}} dy = \frac{A}{\sqrt{k}}, \quad k > 0.$$

Nach dieser Vorbereitung soll das Integral

$$V = \int_0^\infty \frac{e^{-t(1+y)}}{(1+y)\sqrt{y}} dy$$

betrachtet werden. Hier ist

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^\infty \frac{e^{-t(1+y)}}{\sqrt{t}} dy = -\frac{Ae^{-t}}{\sqrt{t}},$$

mithin

$$V = -A\left\{\int \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + Const.\right\}.$$

Setzt man in beiden für V geltenden Gleichungen $t = h$, $t = 0$ und subtrahiert, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-h(1+y)}}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy = A \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

oder umgekehrt

$$A \int_0^h \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \pi - e^{-h} \int_0^\infty \frac{e^{-hy}}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy.$$

Da $\frac{1}{1+y}$ ein positiver echter Bruch ist, so gilt die Ungleichung

$$0 < \int_0^\infty \frac{e^{-hy}}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy < \frac{A}{\sqrt{h}},$$

mithin wird für $h = \infty$

$$A \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \pi, \quad \text{das ist} \quad A^2 = \pi,$$

und schliesslich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky}}{\sqrt{y}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{k}}, \quad k > 0,$$

oder für $y = z^2$

$$\int_0^\infty e^{-kz^2}\, dz = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}, \quad k > 0.$$

Durch mehrmalige Differentiation in Beziehung auf k lassen sich aus den vorigen Formeln die nachstehenden ableiten:

$$\int_0^\infty y^{n-\frac{1}{2}} e^{-ky}\, dy = 2\int_0^\infty z^{2n} e^{-kz^2}\, dz = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{(2k)^n} \sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Mittels partieller Integration findet man noch

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ky}}{\sqrt{y^3}}\, dy = 2\int_0^\infty \frac{1 - e^{-kz^2}}{z^2}\, dz = 2\sqrt{\pi k}$$

oper etwas allgemeiner

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay} - e^{-by}}{\sqrt{y^3}} = 2\int_0^\infty \frac{e^{-az^2} - e^{-bz^2}}{z^2}\, dz = 2\sqrt{\pi}\,(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

Setzt man $a = (\mu - \nu)^2$, $b = (\mu + \nu)^2$ und beachtet, dass die Werte von $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ immer positiv sein müssen, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(\mu-\nu)^2 z^2} - e^{-(\mu+\nu)^2 z^2}}{z^2} dz = \begin{cases} 2\sqrt{\pi} \,.\, \mu \text{ für } 0 \leqq \mu \overline{\gtrless} \nu, \\ 2\sqrt{\pi} \,.\, \nu \text{ für } \mu \geqq \nu. \end{cases}$$

Die Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten ξ und η ist

$$\eta = \frac{\beta}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-(\xi-\alpha)^2 z^2} - e^{(\xi+\alpha)^2 z^2}}{z^2} dz,$$

bildet demnach von $\xi = 0$ bis $\xi = \alpha$ eine Gerade, die mit der Geraden $\eta = \frac{\beta}{\alpha}\xi$ zusammenfällt; von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \infty$ besteht sie aus einer in der Entfernung β parallel zur ξ-Achse liegenden Geraden; gleichen und entgegengesetzten ξ entsprechen gleiche und entgegengesetzte η.

13. Es sei

$$U = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2tx \, dx;$$

man erhält dann

$$\frac{dU}{dt} = -2\int_0^\infty xe^{-x^2} \sin 2tx \, dx$$

und durch partielle Integration, wobei die Formel

$$\int xe^{-x^2} dx = -\tfrac{1}{2} e^{-x^2}$$

zu beachten ist,

$$\frac{dU}{dt} = -2tU \text{ oder } dlU = d(-t^2).$$

Die Integration liefert $U = Ce^{-t^2}$, wobei sich die Konstante C mittels der Bemerkung bestimmt, dass dem Falle $t = 0$ der Spezialwert $U = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ entspricht; es ist demnach

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2tx \, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \,.\, e^{-t^2}$$

und für $x = az$, $t = \frac{b}{a}$

$$\int_0^\infty e^{-a^2 z^2} \cos 2bz \, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad a \gtrless 0.$$

14. Durch Differentiation der Gleichung

$$U=\int_0^\infty \frac{e^{-ty}(\sin t - y\cos t)}{(1+y^2)\sqrt{y}}\,dy$$

erhält man

$$\frac{dU}{dt}=\int_0^\infty \frac{e^{-ty}\cos t}{\sqrt{y}}\,dy=\sqrt{\pi}\,\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$$

mithin

$$U=\sqrt{\pi}\left\{\int \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt + Const.\right\};$$

subtrahiert man die für $t=h$ und $t=0$ entstehenden Werte von U, so gelangt man zu der Gleichung

$$\sqrt{\pi}\int_0^h \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sin h\int_0^\infty \frac{e^{-hy}\,dy}{(1+y^2)\sqrt{y}}-\cos h\int_0^\infty \frac{y e^{-hy}\,dy}{(1+y^2)\sqrt{y}}.$$

Bei unendlich wachsenden h wird dieselbe zur folgenden:

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und für $t=\mu\theta$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}},\quad \mu>0.$$

15. Nach demselben Verfahren lässt sich aus der Gleichung

$$V=\int_0^\infty \frac{e^{-ty}(\cos t + y\sin t)}{(1+y^2)\sqrt{y}}\,dy$$

die nachstehende Formel herleiten:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \mu\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}},\quad \mu>0.$$

Nimmt man in den vorigen Gleichungen $t=\eta^2$, so wird

$$2\int_0^\infty \cos(\eta^2)\,d\eta=2\int_0^\infty \sin(\eta^2)\,d\eta=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

oder

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(\eta^2)\,d\eta=\int_{-\infty}^\infty \sin(\eta^2)\,d\eta=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und hieraus für $\eta=\gamma+\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(y^2 + \omega^2) \cos 2 y\omega \, d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \sin(y^2 + \omega^2) \sin 2 y\omega \, d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(y^2 + \omega^2) \cos 2 y\omega \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(y^2 + \omega^2) \sin 2 y\omega \, d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Die beiden Integrale, in denen $\sin 2 y \omega$ vorkommt, verschwinden hier, weil die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen die gemeinsame Eigenschaft $f(-\omega) = -f(\omega)$ besitzen; die übrig bleibenden Gleichungen

$$\cos(y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega^2) \cos 2 y\omega \, d\omega - \sin(y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega^2) \cos 2 y\omega d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin(y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega^2) \cos 2 y\omega \, d\omega + \cos(y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega^2) \cos 2 y\omega d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

enthalten zwei unbekannte Integrale und liefern als Werte der letzteren

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega^2) \cos 2 y\omega d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{\cos(y^2) + \sin(y^2)\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega^2) \cos 2 y\omega d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{\cos(y^2) - \sin(y^2)\}.$$

Für $\omega = \alpha\zeta$, $y = \frac{\beta}{\alpha}$ lassen sich diese Resultate in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(\alpha^2\zeta^2) \cos 2\beta\zeta \, d\zeta &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \\ \int_0^{\infty} \sin(\alpha^2\zeta^2) \cos 2\beta\zeta \, d\zeta &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad \alpha > 0,$$

und in die eine Formel zusammenziehen

$$\int_0^{\infty} e^{i\alpha^2\zeta^2} \cos 2\beta\zeta \, d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]}, \quad i = \sqrt{-1},$$

welche dem Endresultate von Nr. 13 analog ist.

16. Aus der Gleichung

$$U = e^{-a} \int_0^a \frac{1}{x} e^x \sin tx \, dx - e^a \int_0^a \frac{1}{x} e^{-x} \sin tx \, dx$$

erhält man

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2\cos at - (e^a + e^{-a})}{1+t^2}$$

und ferner, wenn nach geschehener Integration $t = b$, $t = 0$ gesetzt und subtrahiert wird,

$$e^{-a}\int_0^a \frac{1}{x} e^x \sin bx\,dx - e^a \int_0^a \frac{1}{x} e^{-x} \sin bx\,dx$$

$$= 2\int_0^b \frac{\cos at}{1+t^2} dt - (e^a + e^{-a}) \arctan b,$$

oder

$$\int_0^b \frac{\cos at}{1+t^2} dt = \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \arctan b$$

$$+ \tfrac{1}{2} e^{-a} \int_0^a \frac{\sin bx}{x} dx - \tfrac{1}{2} e^a \int_0^a \frac{\sin bx}{x} dx$$

$$+ \tfrac{1}{2} e^{-a} \int_0^a \frac{1}{x}(e^x - 1) \sin bx\,dx + \tfrac{1}{2} e^a \int_0^a \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \sin bx\,dx.$$

Setzt man im ersten und zweiten Integrale rechter Hand $bx = y$ und zur Abkürzung

$$\frac{e^{-a}(e^x - 1) + e^a(1 - e^{-x})}{2x} = \varphi(x),$$

so ist auch

$$\int_0^b \frac{\cos at}{1+t^2} dt = \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \arctan b$$

$$- \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a}) \int_0^{ab} \frac{\sin y}{y} dy + \int_0^a \varphi(x) \sin bx\,dx.$$

Mittels partieller Integration ergiebt sich nun überhaupt

$$\int_0^a f(x) \sin bx\,dx = \frac{f(0) - f(a)\cos ab}{b} + \frac{1}{b}\int_0^a f'(x) \cos bx\,dx$$

und wenn $f(x)$ und $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = a$ endlich und stetig bleiben, so hat das letzte Integral irgend einen endlichen Wert; hieraus zusammen folgt

$$\text{für } b = \infty, \quad Lim \int_0^a f(x) \sin bx\,dx = 0.$$

Die spezielle Funktion

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} e^{-a}\left(\tfrac{1}{1} + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right) + \tfrac{1}{2} e^{+a}\left(\tfrac{1}{1} - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \cdots\right)$$

genügt den für $f(x)$ angegebenen Bedingungen, daher ist für $b = \infty$

$$\int_0^\infty \frac{\cos a t}{1+t^2} dt = \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a})\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a})\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Durch Substitution von $t = \frac{\theta}{\alpha}$, $a = \alpha\beta$ ergiebt sich noch

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

17. Ganz analog lässt sich die Gleichung

$$V = e^{-a}\int_0^a \frac{1}{x} e^x \sin t x \, dx + e^a \int_0^a \frac{1}{x} e^{-x} \sin t x \, dx$$

behandeln; man findet

$$\int_0^\infty \frac{t \sin a t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

und mittels derselben Substitution wie vorhin

$$\int_0^\infty \frac{\theta \sin \beta\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Dieselbe Formel kann aus Nr. 16 durch Differentiation nach β abgeleitet werden; fernere Differentiationen nach β sind aber nicht statthaft. Dagegen dürfen die vorigen Formeln beliebig vielmal nach α differenziert werden.

18. Aus der Gleichung

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

erhält man für $x = a + (b-a)u$

$$\int_0^1 f'[a(1-u) + bu]\, du = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

und diese Gleichung werde m mal in Beziehung auf a differenziert; das Resultat ist

$$\int_0^1 (1-u)^m f^{(m+1)}[a(1-u)+bu]\,du$$
$$= (m)_0 \frac{1.2\ldots m}{(b-a)^{m+1}}[f(b)-f(a)] - (m)_1 \frac{1.2\ldots(m-1)}{(b-a)^m} f'(a) - \cdots$$
$$\cdots - (m)_{m-1}\frac{1}{(b-a)^2} f^{(m-1)}(a) - (m)_m \frac{1}{b-a} f^{(m)}(a),$$

wobei aber die Bedingung erfüllt sein muss, dass $f(x)$, $f'(x), \ldots$ $f^{(m+1)}(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben. Setzt man für die Binomialkoeffizienten ihre Werte, multipliziert durchgängig mit
$$\frac{(b-a)^{m+1}}{1.2.3\ldots m}$$
und nimmt schliesslich $b = a + h$, so erhält man
$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(a) + h^{m+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^m}{1.2\ldots m} f^{(m+1)}(a+hu)\,du.$$

Dies ist der Taylorsche Satz, wobei der Rest der Reihe unter der Form eines bestimmten Integrals erscheint.

§ 24.

Entwicklung bestimmter Integrale in Reihen oder Produkte.

1. Benutzt man die unter der Bedingung $z^2 < 1$ giltige Reihenentwicklung
$$l\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(\frac{1}{1}z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots\right)$$
und berücksichtigt die Formel 45 in § 10, so erhält man für $x^2 < 1$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{1+x\sin\theta}{1-x\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi\left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Hier ist die Summe der rechts stehenden Reihe bekannt, daher
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{1+x\sin\theta}{1-x\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi \arcsin x,$$
oder für $x = \frac{b}{a}$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi \arcsin\frac{b}{a}.$$

2. Nach demselben Verfahren ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\sin\theta\, d\theta = \pi\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

3. Beachtet man die Integralformel § 10 Nr. 43 und benutzt die Summenformel (Compendium d. höh. Anal. I. B. § 50)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{z\, dz}{e^z - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Leitet man aus der Summenformel in Nr. 3 die folgende her:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

und benutzt die für $z \leqq 1$ giltige Reihenentwicklung

$$l(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots,$$

so ergiebt sich

$$\int_0^1 l(1 + x)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{12}.$$

5. Mittels der in Tl. I, § 35 und § 45 angegebenen Reihenformeln findet man für ein ganzes positives $n > 0$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{1 - 2\varkappa\cos\theta + \varkappa^2} = \frac{\pi\varkappa^n}{1 - \varkappa^2}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

6. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin\theta\, d\theta}{1 - 2\varkappa\cos\theta + \varkappa^2} = \frac{\pi}{2}\varkappa^{n-1}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

7. $$\int_0^{\pi} l(1 - 2\varkappa\cos\theta + \varkappa^2)\cos n\theta\, d\theta = -\pi\frac{\varkappa^n}{n}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

8. $$\int_0^{\pi} \arctan\left(\frac{\varkappa\sin\theta}{1 - \varkappa\cos\theta}\right)\sin n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{\varkappa^n}{n}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

9. $$\int_0^{\pi} e^{\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varkappa^n}{1.2\ldots n}.$$

10. $$\int_0^{\pi} e^{\varkappa\cos\theta}\sin(\varkappa\sin\theta)\sin n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varkappa^n}{1.2\ldots n}.$$

11. Einerseits ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{\varkappa}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\varkappa^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\varkappa^5}{1.2\ldots5} - \cdots\right\};$$

andererseits

$$\int_0^{\varkappa}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{1}{1}\cdot\frac{\varkappa}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\varkappa^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\varkappa^5}{1.2\ldots5} - \cdots,$$

mithin

$$\int_0^{\varkappa}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta)\,d\theta.$$

Da $\cos(\varkappa\sin\theta)$ zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, so hat man

$$-\frac{1}{e^{\varkappa\cos\theta}} < e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta) < +\frac{1}{e^{\varkappa\cos\theta}}$$

und noch stärker

$$-\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\theta} < e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta) < +\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\theta},$$

woraus folgt:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2(\varkappa^2+2)}} < \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta)\,d\theta < +\frac{\pi}{\sqrt{2(\varkappa^2+2)}}.$$

Für $\varkappa = \infty$ ergiebt sich nun, wie früher auf anderem Wege,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

12. Wenn sich der Wert eines bestimmten Integrales sowohl durch direkte Integration als auch mittels einer unendlichen Reihe finden lässt, so führt die Vergleichung beider Formen zu einer neuen Reihenentwicklung. So ist z. B. bei positiven $1-\tau$ einerseits

$$\int_0^1 (1-\tau)^x dx = \frac{\tau}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)};$$

andererseits hat man nach dem binomischen Satze falls τ die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreitet,

$$(1-\tau)^x = 1 - \frac{x}{1}\tau - \frac{x(1-x)}{1\,.\,2}\tau^2 - \frac{x(1-x)(2-x)}{1\,.\,2\,.\,3}\tau^3 - \cdots,$$

mithin

$$\int_0^1 (1-\tau)^x dx = 1 - \frac{J_1}{1}\tau - \frac{J_2}{1\,.\,2}\tau^2 - \frac{J_3}{1\,.\,2\,.\,3}\tau^3 - \cdots,$$

$$J_n = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)\,dx.$$

Die Vergleichung beider Formen liefert

$$\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)} = 1 - \frac{J_1}{1}\tau - \frac{J_2}{1\,.\,2}\tau^2 - \frac{J_3}{1\,.\,2\,.\,3}\tau^3 - \cdots$$

$$-1 \leqq \tau \leqq +1,$$

und zwar sind die Werte der mit J bezeichneten Integrale

$$J_1 = \tfrac{1}{2}, \quad J_2 = \tfrac{1}{6}, \quad J_3 = \tfrac{1}{4}, \quad J_4 = \tfrac{19}{30}, \quad J_5 = \tfrac{9}{4}, \ldots$$

so dass man auch schreiben kann

$$\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)} = \frac{1}{\tau} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}\tau - \tfrac{1}{24}\tau^2 - \tfrac{19}{720}\tau^3 - \tfrac{3}{160}\tau^4 - \cdots$$

$$-1 \leqq \tau \leqq +1.$$

13. Von der Gleichung

$$\int_0^1 (1-\tau+\tau x)(1-\tau)^x dx = \left[\frac{\tau}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)}\right]^2$$

ausgehend, erhält man nach demselben Verfahren

$$\left[\frac{\tau}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)}\right]^2 = 1 - \tau + \frac{K_2}{1\,.\,2}\tau^2 + \frac{K_3}{1\,.\,2\,.\,3}\tau^3 + \cdots$$

$$-1 \leqq \tau \leqq +1,$$

worin die Koeffizienten folgende sind:

$$K_2 = \tfrac{1}{6}, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = -\tfrac{1}{10}, \quad K_5 = -\tfrac{1}{2}, \ldots$$

$$K_n = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(n-2-x)[1-(n-1)x]\,dx.$$

Dasselbe Resultat lässt sich aus Nr. 12 durch Differentiation in Beziehung auf τ herleiten.

Bemerkenswert ist noch die folgende Kombination der beiden letzten Entwicklungen:

$$\left[\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\tau} + \frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)}\right]\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)}$$
$$= \frac{H_1}{1} + \frac{H_2}{1.2}\tau + \frac{H_3}{1.2.3}\tau^2 + \frac{H_4}{1.2.3.4}\tau^3 + \cdots,$$
$$-1 \leqq \tau \leqq +1,$$

worin H_1, H_2 u. s. w. die nachstehenden Werte haben:

$$H_1 = -\tfrac{1}{12},\quad H_2 = 0,\quad H_3 = \tfrac{1}{120},\quad H_4 = \tfrac{1}{80}, \ldots$$
$$H_n = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x).(\tfrac{1}{2}-x)\,dx.$$

14. Aus der Integralformel

$$\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{x-1}-1}{\tau}\,dx = \frac{1}{(1-\tau)\tau}\int_0^1 (1-\tau)^x dx - \frac{1}{\tau}$$
$$= \frac{1}{(1-\tau)l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)} - \frac{1}{\tau}$$

erhält man auf ähnliche Weise wie in Nr. 12

$$\frac{1}{(1-\tau)l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)} - \frac{1}{\tau} = \frac{G_1}{1} + \frac{G_2}{1.2}\tau + \frac{G_3}{1.2.3}\cdot\tau^2 + \cdots$$
$$-1 < \tau < +1,$$

worin G_n durch die Formel

$$G_n = \int_0^1 (1-x)(2-x)\ldots(n-x)\,dx$$

bestimmt ist. Multipliziert man die gewonnene Reihenentwicklung mit $d\tau$ und integriert zwischen den Grenzen $\tau = 0$ und $\tau = \tau$, so gelangt man zu der bemerkenswerten Formel

$$l\left[l\left(\frac{1}{1-\tau}\right)\right] = l\tau + \frac{G_1}{1}\cdot\frac{\tau}{1} + \frac{G_2}{1.2}\cdot\frac{\tau^2}{2} + \frac{G_3}{1.2.3}\cdot\frac{\tau^3}{3} + \cdots$$
$$-1 < \tau < +1;$$

dabei ist

$$G_1 = \tfrac{1}{2},\quad G_2 = \tfrac{5}{6},\quad G_3 = \tfrac{9}{4},\quad G_4 = \tfrac{251}{30}, \ldots$$

15. Bestimmt man den Wert des Integrals

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\mu\theta\, d\theta$$

erst direkt und nachher mittels der Reihenentwicklung (Compendium d. h. Anal. I. B. § 48, Nr. 18)

$$\cos\mu\theta = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}\sin^2\theta - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4\theta$$
$$- \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sin^6\theta - \cdots,$$

so erhält man für $\mu = 2\lambda$

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi} = 1 - \frac{\lambda^2}{1^2} - \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\frac{\lambda^2}{2^2} - \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\frac{\lambda^2}{3^2} - \cdots$$

Die rechts stehende Reihe lässt sich in folgende zwei Teile zerlegen:

$$1 - \frac{\lambda^2}{1^2} - \cdots - \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{(n-1)^2}\right)\frac{\lambda^2}{n^2}$$
$$-\left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right)S,$$

$$S = \frac{\lambda^2}{(n+1)^2} + \left(1-\frac{\lambda^2}{(n+1)^2}\right)\frac{\lambda^2}{(n+2)^2} + \cdots$$

und der erste Teil durch gewöhnliche Addition zusammenziehen; dies giebt

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi} = \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right)[1-\sigma_n\lambda^2],$$

$$\sigma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \left(1-\frac{\lambda^2}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{(n+2)^2} + \cdots$$

Wählt man die ganze Zahl $n+1 > \lambda$, so ist σ_n positiv und kleiner als

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots$$

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots$$

d. i.

$$0 < \sigma_n < \frac{1}{n},$$

und es kann daher $\sigma_n = \frac{\varrho}{n}$ gesetzt werden, wo ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet. Nach diesen Erörterungen ist

$$\frac{\sin \lambda \pi}{1 - \frac{\varrho \lambda^2}{n}} = \pi \lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right);$$

für $n = \infty$ folgt hieraus das bekannte unendliche Produkt für den Sinus eines beliebigen Bogens.

16. Unter der Voraussetzung $a > b > 0$ lässt sich das Integral

$$F = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

auf verschiedene Weise entwickeln. Für $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ und wenn die Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varkappa$$

benutzt wird, findet man zunächst

$$F = \frac{\pi}{2a}\left\{1 + \tfrac{1}{4}\varkappa^2 + \tfrac{9}{64}\varkappa^4 + \tfrac{25}{256}\varkappa^6 + \tfrac{1225}{16384}\varkappa^8 + \cdots\right\}.$$

Diese Formel gewährt nur dann eine bequeme Rechnung, wenn $\varkappa$ ein kleiner Bruch ist, also a wenig mehr als b beträgt.

Behufs einer zweiten Entwicklung sei

$$\frac{a - b}{a + b} = \varrho, \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\psi;$$

aus der Gleichung

$$F = \frac{1}{a + b}\int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + 2\varrho \cos \psi + \varrho^2}}$$

folgt dann

$$F = \frac{\pi}{a + b}\left\{1 + \tfrac{1}{4}\varrho^2 + \tfrac{9}{64}\varrho^4 + \tfrac{25}{256}\varrho^6 + \tfrac{1225}{16384}\varrho^8 + \cdots\right\},$$

wobei die Reihe rascher konvergiert als die vorige.

Falls a bedeutend grösser als b ist, mithin $\varkappa$ nahe an der Einheit liegt, sei

$$\sin\varphi = x, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1-x^2} = \lambda,$$

mithin

$$F = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1-(1-\lambda^2)x^2]}}.$$

Man zerlege nun das Integrationsintervall 0 bis 1 in die beiden Intervalle

$$0 \text{ bis } \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \text{ bis } 1$$

und substituiere

im ersten Integrale $x = \frac{y}{\sqrt{\lambda + y^2}}$, im zweiten Integrale $x = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda y^2}}$,

die beiden Integrale werden dann gleich und es entsteht zunächst die Transformation

$$F = \frac{2}{a}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1+\lambda y^2)(\lambda + y^2)}}.$$

Wird hier $(1+\lambda y^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze entwickelt, so ergiebt sich

$$F = \frac{1}{a}\left\{C_0 - \tfrac{1}{2}C_2\lambda + \frac{1.3}{2.4}C_4\lambda^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}C_6\lambda^3 + \cdots\right\},$$

worin die Koeffizienten C_0, C_2, C_4, ... auf folgende Weise zu berechnen sind:

$$C_0 = 2l(1+\sqrt{1+\lambda}) + l\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\{2\sqrt{1+\lambda} - (n-1)\lambda C_{n-2}\}.$$

Falls λ so klein ist, dass λ^3, λ^4, ... vernachlässigt werden können, hat man

$$C_0 = l\left(\frac{4}{\lambda}\right) + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{3}{16}\lambda^2,$$

$$C_2 = -\tfrac{1}{2}\lambda l\left(\frac{4}{\lambda}\right) + 1 + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{3}{8}\lambda^2,$$

$$C_4 = \tfrac{3}{8}\lambda l\left(\frac{4}{\lambda}\right) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{7}{16}\lambda^2,$$

. . . .

also bei Weglassung der Terme, welche λ^3 und λ^4 enthalten,

$$F = \frac{1}{a}\left\{\left(1 + \tfrac{1}{4}\lambda^2\right) l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - \tfrac{1}{4}\lambda^2\right\},$$

Für sehr kleine λ wird noch einfacher

$$F = \frac{1}{a}\, l\left(\frac{4}{\lambda}\right) = \frac{1}{a}\, l\left(\frac{4a}{b}\right).$$

Beispielsweise entspricht den Werten $a = 1$ und $b = 0{,}01$

$$F = 5{,}9915894.$$

17. Das Integral

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi,$$

welches die Länge des aus den Halbachsen a und $b < a$ konstruierten Ellipsenquadranten darstellt, gestattet ähnliche Transformationen wie das vorige. Unter Beibehaltung der in Nr. 16 eingeführten Bezeichnungen erhält man erstens

$$E = \frac{\pi a}{2}\left\{1 - \tfrac{1}{4}\varkappa^2 - \tfrac{3}{64}\varkappa^4 - \tfrac{5}{256}\varkappa^6 - \tfrac{175}{16384}\varkappa^8 - \cdots\right\}$$

und zweitens

$$E = \frac{\pi(a+b)}{4}\left\{1 + \tfrac{1}{4}\varrho^2 + \tfrac{1}{64}\varrho^4 + \tfrac{1}{256}\varrho^6 + \tfrac{25}{16384}\varrho^8 + \cdots\right\}.$$

Benutzt man die vorhin angegebene Zerlegung des Integrationsintervalls nebst den zugehörigen Substitutionen und wendet nachher die partielle Integration an, so gelangt man zu der Transformation

$$E = a\left\{1 + \lambda - 2\lambda \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{(1 + \lambda y^2)(\lambda + y^2)}}\right\};$$

diese führt zu der Entwicklung

$$E = a\left\{1 - (C_2 - 1)\lambda + \tfrac{1}{2} C_4 \lambda^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} C_6 \lambda^3 + \cdots\right\},$$

worin $C_2, C_4, C_6, \ldots$ dieselben Werte haben wie in Nr. 16.

Bei Weglassung von $\lambda^3, \lambda^4, \ldots$ reduziert sich die eingeklammerte Reihe auf

$$1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 l\left(\frac{4}{\lambda}\right)$$

und ist daher für kleine λ nahezu

$$E = a - \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} l\left(\frac{4a}{b}\right).$$

Beispielsweise entspricht den Werten $a = 1$ und $b = 0{,}01$

$$E = 1{,}0002747.$$

18. Unter der Voraussetzung eines beliebigen positiven p werde unter $\Gamma(p)$ folgende Funktion verstanden:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{p-1} dx$$

oder, wenn $x = e^{-z}$ gesetzt wird,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz.$$

Durch partielle Integration findet man leicht

$$\int_0^\infty z^q e^{-z} dz = q \int_0^\infty z^{q-1} e^{-z} dz, \quad q > 0,$$

das ist

$$\Gamma(q+1) = q\Gamma(q),$$

und durch mehrmalige Anwendung der vorstehenden Formel

$$\Gamma(k+r) = r(r+1)(r+2)\ldots(r+k-1)\cdot\Gamma(r); \quad r > 0.$$

Hiernach ist, wenn man von dem Falle $r = 1$, $\Gamma(1) = 1$ ausgeht,

$$\Gamma(k+1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k.$$

Weil ferner nach § 23 Nr. 12

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}$$

ist, so folgt für $r = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma(k + \tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

In der ursprünglichen für $\Gamma(p)$ gegebenen Definition betrachte man nun $l\left(\frac{1}{x}\right) = -lx$ als den Grenzwert von $n\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)$ für $n = \infty$; es ist dann

$$\Gamma(p) = Lim\left\{n^{p-1}\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{p-1}dx\right\},$$

oder für $x = y^n$

$$\Gamma(p) = Lim\{n^p\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{p-1}dy\},$$

d. i. nach Formel 29) in § 10

$$\Gamma(p) = Lim\left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot n^{p-1}}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}\right\},\quad n=\infty,$$

wofür man auch

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{(1+\frac{1}{1})^p}{1+\frac{1}{1}p}\cdot\frac{(1+\frac{1}{2})^p}{1+\frac{1}{2}p}\cdot\frac{(1+\frac{1}{3})^p}{1+\frac{1}{3}p}\cdots$$

schreiben kann (vergl. Tl. I, S. 267).

Nach der vorhergehenden Formel findet man

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)$$

$$= Lim\left\{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{1}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}\cdots\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}}\right\},$$

das ist

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi},\quad 0<\lambda<1.$$

Im speziellen Falle $\lambda = \frac{1}{2}$ ergiebt sich wie früher $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Setzt man $p = 1+q$ und nimmt die Logarithmen, so erhält man leicht

$$l\Gamma(1+q) = Lim\left\{q\,l n - l\left(1+\frac{q}{1}\right) - l\left(1+\frac{q}{2}\right) - \cdots - l\left(1+\frac{q}{n}\right)\right\}.$$

Unter der Voraussetzung $-1<q<+1$ lassen sich die vorkommenden Logarithmen nach Potenzen von q entwickeln, wobei zur Abkürzung

$$Lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-l n\right) = C$$

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots = S_k,\quad k>1$$

sein möge; das Resultat ist dann

$$l\Gamma(1+q) = -Cq + \tfrac{1}{2}S_2q^2 - \tfrac{1}{3}S_3q^3 + \tfrac{1}{4}S_4q^4 - \cdots,$$
$$-1<q<+1.$$

Hieraus erhellt die Möglichkeit, $l\Gamma(1+q)$, also auch $l\Gamma(q)$ mittels einer gut konvergierenden Reihe zu berechnen. Die Werte von S_2, S_3, ... sind:

$$S_2 = 1{,}64493\,40668, \quad S_3 = 1{,}20205\,69032,$$
$$S_4 = 1{,}08232\,32337, \quad S_5 = 1{,}03692\,77551,$$
$$S_6 = 1{,}01734\,30620, \quad S_7 = 1{,}00834\,92774,$$
$$S_8 = 1{,}00407\,73562, \quad S_9 = 1{,}00200\,83928,$$
$$S_{10} = 1{,}00099\,45751, \quad S_{11} = 1{,}00049\,41886,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Konstante C ergiebt sich aus der vorigen Gleichung für $q = \frac{1}{2}$, wo der Wert der linken Seite bekannt ist; man erhält

$$C = 0{,}57721\,56649.$$

Eine oft brauchbare kleine Tafel der Brigg'schen Logarithmen von $\Gamma(q)$ und $\Gamma(1+q)$ ist folgende:

q	$\log\Gamma(q)$	$\log\Gamma(1+q)$
$\frac{1}{12}$	1,060 6762	0,981 4950 — 1
$\frac{2}{12}$	0,745 5679	0,967 4166 — 1
$\frac{3}{12}$	0,559 3811	0,957 3211 — 1
$\frac{4}{12}$	0,427 9627	0,950 8415 — 1
$\frac{5}{12}$	0,327 8812	0,947 6700 — 1
$\frac{6}{12}$	0,248 5749	0,947 5449 — 1
$\frac{7}{12}$	0,184 3249	0,950 2417 — 1
$\frac{8}{12}$	0,131 6565	0,955 5652 — 1
$\frac{9}{12}$	0,088 2838	0,963 3451 — 1
$\frac{10}{12}$	0,052 6120	0,973 4308 — 1
$\frac{11}{12}$	0,023 4774	0,985 6888 — 1

Differenziert man die für $n = \infty$ geltende Gleichung

$$l\Gamma(1+q) = q\,ln - l\left(1+\frac{q}{1}\right) - l\left(1+\frac{q}{2}\right) - \cdots - l\left(1+\frac{q}{n}\right)$$

in Beziehung auf q und addiert nachher die Gleichung

$$C = -\,ln + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

so erhält man

$$\frac{\Gamma'(1+q)}{\Gamma(1+q)}+C=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+q}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+q}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+q}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x^n)(1-x^q)}{1-x}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1-x^q}{1-x}\,dx+\int_0^1\frac{1-x^q}{1-x}\,x^n\,dx.$$

Bei positiven q behält der Quotient $(1-x^q):(1-x)$ immer einen endlichen Wert; daraus folgt leicht, dass das letzte Integral bei unendlich wachsenden n gegen die Null konvergiert, womit die Formel

$$\frac{\Gamma'(1+q)}{\Gamma(1+q)}=-C+\int_0^1\frac{1-x^q}{1-x}\,dx,\quad q\geqq 0$$

gewonnen wird. Wegen $l\Gamma(p)=l\Gamma(1+p)-lp$ ist auch

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=-C-\frac{1}{p}=\int_0^1\frac{1-x^p}{1-x}\,dx,\quad p\geqq 0,$$

oder, wenn man $1-x^p$ in $1-x^{p-1}+x^{p-1}-x^p$ zerlegt,

$$\Gamma'(p)=\Gamma(p)\left\{-C+\int_0^1\frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx\right\},\quad p\geqq 0,$$

mithin zufolge der ursprünglichen Bedeutung von $\Gamma(p)$

$$\int_0^\infty z^{p-1}e^{-z}lz\,dz=\Gamma(p)\left\{-C+\int_0^1\frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx\right\},\quad p>0.$$

In den speziellen Fällen

$$p=k\quad\text{und}\quad p=k+\tfrac{1}{2},$$

wo k eine ganze positive Zahl bezeichnet, lässt sich die rechte Seite vollständig entwickeln.

§ 25.

Summierung von Reihen mittels bestimmter Integrale.

Wenn ein Ausdruck von der Form $f(x, m)\,dx$ zwischen zwei von m unabhängigen Grenzen α und β integriert wird, so ist der Integralwert im allgemeinen eine neue Funktion von m; es besteht also eine Gleichung von der Form

$$\int_\alpha^\beta f(x, m)\,dx = \varphi(m).$$

Aus dieser folgt:

$$\int_\alpha^\beta \{f(x, 0) + f(x, 1) + f(x, 2) + \cdots + f(x, n-1)\}\,dx$$
$$= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n-1).$$

Hier kann es sich treffen, dass die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summierbar ist, und dann erhält man die Summe der Reihe $\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, dessen Wert sich nicht selten auf anderem Wege finden lässt.

1. Durch Anwendung der Formel

$$\int_0^1 x^{k+m-1}\,dx = \frac{1}{k+m}, \quad k + m > 0$$

erhält man

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{k+n-1}$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{k+n-1}}{1+x}\,dx.$$

Zufolge des Umstandes, dass $\frac{1}{1+x}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, findet man

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+n} < \int_0^1 \frac{x^{k+n-1}}{1+x}\,dx < \frac{1}{k+n},$$

mithin für $n = \infty$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \cdots = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx$$

oder für $k = \frac{a}{b}$, $x = t^b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \cdots = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

Bemerkenswerte spezielle Fälle hiervon sind:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = l2,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + l2\right),$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - l2\right),$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \cdots = \frac{\pi + l(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \cdots = \frac{\pi - l(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}.$$

2. Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+6} - \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+8} + \frac{1}{k+10} - \frac{1}{k+5} + \cdots$$

enthält dieselben Terme wie die vorhin summierte Reihe, nur ist die Anordnung hier insofern eine verschiedene, als je zwei positive Terme und ein negativer Term aufeinander folgen. Betrachtet man zuerst die endliche Reihe

$$S_n = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+6} - \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+4n-4} + \frac{1}{k+4n-2} - \frac{1}{k+2n-1},$$

so erhält man mittels der vorigen Methode

$$S_n = \int_0^1 \left\{ \frac{1-x^{4n}}{1-x^2} - \frac{x(1-x^{2n})}{1-x^2} \right\} x^{k-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+1} - x^{4n}}{1-x^2} x^{k-1} dx$$

oder, wenn im zweiten Integrale $x^{2n} = y$ substituiert wird,

$$S_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{y^{1+\frac{1}{2n}} - y^2}{n\left(1 - y^{\frac{1}{n}}\right)}\, y^{\frac{k}{2n}-1}\,dy.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n ergiebt sich die gesuchte Summe

$$S_\infty = \int\limits_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{y - y^2}{l\left(\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{dy}{y};$$

das zweite Integral geht für $y = e^{-z}$ über (§ 23 I Nr. 5) in

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-2z}}{z}\,dz = l2,$$

mithin ist

$$S_\infty = \int\limits_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2} l2,$$

oder für $k = \frac{a}{b}$, $x = t^b$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+4b} + \frac{1}{a+6b} - \frac{1}{a+3b}$$
$$+ \frac{1}{a+8b} + \frac{1}{a+10b} - \frac{1}{a+5b} + \cdots = \int\limits_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt + \tfrac{1}{2} l2.$$

Die Summe der neuen Reihe ist also um $\frac{1}{2}l2$ grösser als die Summe der früheren Reihe; z. B.

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{3}{2} l2^*,$$
$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{21} - \tfrac{1}{11} + \cdots = \tfrac{1}{4}(\pi + l4).$$

---

* Wenn es nur auf den Beweis ankommt, dass diese Reihe eine grössere Summe besitzt als $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -$ etc., so genügt schon die Zusammenziehung je zwei positiver Terme. In der so entstehenden Reihe

$$\frac{4}{1.3} - \tfrac{1}{2} + \frac{12}{5.7} - \tfrac{1}{4} + \frac{20}{9.17} - \tfrac{1}{6} + \cdots$$

ist nämlich

$$\frac{8n-4}{(4n-3)(4n-1)} > \frac{1}{2n} > \frac{8n+4}{(4n+1)(4n+3)},$$

d. h. für 1, 2, 3, ... jeder Term grösser als der nachfolgende, mithin die Summe

$$> \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2} > 0{,}8 > (0{,}69\ldots = l2).$$

3. Die in Nr. 2 an einem speziellen Falle gezeigte Untersuchung über den Einfluss, den eine Umstellung der Reihenglieder auf die Reihensumme ausübt, lässt sich auf folgende Weise verallgemeinern. Bezeichnet $F(x)$ eine bei wachsendem x abnehmende und positiv bleibende Funktion von x, deren asymptotischer Wert $F(\infty) = 0$ ist, so konvergiert bekanntlich die Reihe

$$F(0) - F(1) + F(2) - F(3) + \cdots;$$

ihre Summe heisse S. Dagegen soll unter S^* die Summe der neuen Reihe verstanden werden, die aus der vorigen Reihe dadurch entsteht, dass man immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen lässt. Setzt man zur Abkürzung $F(x) = u_x$, so ist S der für $m = \infty$ entstehende Grenzwert von

$$S_{2m} = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2m-2} - u_{2m-1},$$

dagegen ist S^* der für $n = \infty$ entstehende Grenzwert von

$$\begin{aligned} S^*_{n(p+q)} = {} & u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2p-2} \\ & - u_1 - u_3 - u_5 - \cdots - u_{2q-1} \\ & + u_{2p} + u_{2p+2} + u_{2p+4} + \cdots + u_{4p-2} \\ & - u_{2q+1} - u_{2q+3} - u_{2q+5} - \cdots - u_{4q-1} \\ & + u_{4p} + u_{4p+2} + u_{4p+4} + \cdots + u_{6p-2} \\ & - u_{4q-1} - u_{4q+3} - u_{4q+5} - \cdots - u_{6q-1} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + u_{(2n-2)p} + u_{(2n-2)p+2} + \cdots + u_{2np-2} \\ & - u_{(2n-2)q+1} - u_{(2n-2)q+3} - \cdots - u_{2nq-1}. \end{aligned}$$

Unter der nicht beschränkenden Voraussetzung $p > q$ werde nun $m = nq$ genommen; die erste Reihe $S_{2m} = S_{2nq}$ enthält dann dieselben negativen Terme, welche auch in $S^*_{n(p+q)}$ vorkommen, aber eine geringere Zahl positiver Terme, und zwar ist

$$\text{A)} \quad S^*_{n(p+q)} - S_{2nq} = u_{2nq} + u_{2nq+2} + u_{2nq+4} + \cdots + u_{2np-2},$$

wobei die Reihe rechter Hand $n(p-q)$ Terme zählt.

Um die Summe derselben anders auszudrücken, erinnere man sich, dass $F(x)$ eine kontinuierlich abnehmende Funktion ist, dass also für $\varkappa < x < \lambda$ die Ungleichheit $F(\varkappa) > F(x) > F(\lambda)$ besteht, aus welcher folgt:

$$\int_\varkappa^\lambda F(\varkappa)\,dx > \int_\varkappa^\lambda F(x)\,dx > \int_\varkappa^\lambda F(\lambda)\,dx,$$

oder

$$(\lambda - \varkappa) F(\varkappa) > \int_{\varkappa}^{\lambda} F(x)\, dx > (\lambda - \varkappa) F(\varkappa).$$

Zerlegt man nun das Integral

$$\int_{a}^{a+rh} F(x)\, dx,$$

worin r eine ganze positive Zahl bedeutet, nach dem Schema

$$\int_{a}^{a+rh} = \int_{a}^{a+h} + \int_{a+h}^{a+2h} + \int_{a+2h}^{a+3h} + \cdots + \int_{a+(r-1)h}^{a+rh}$$

und wendet auf jedes Integral rechter Hand die vorige Ungleichung an, so erhält man*

$$h\{F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(a+[r-1]h)\}$$
$$> \int_{a}^{a+rh} F(x)\, dx >$$
$$h\{F(a+h) + F(a+2h) + F(a+3h) + \cdots + F(a+rh)\},$$

oder in anderer Anordnung

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} F(x)\, dx$$
$$< F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(a-[r-1]h) <$$
$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} F(x)\, dx + F(a) - F(a+rh).$$

Für $F(x) = u_x$, $a = 2nq$, $h = 2$, $r = n(p-q)$ dient diese Ungleichung zur Transformation der Gleichung A); es wird nämlich

$$\tfrac{1}{2}\int_{2nq}^{2np} F(x)\, dx < S^*_{n(p+q)} - S_{2nq} < \tfrac{1}{2}\int_{2nq}^{2np} F(x)\, dx + u_{2nq} - u_{2np},$$

oder für $x = n\xi$

---

* Geometrisch ist dies ein unmittelbar anschaulicher Satz. Wird nämlich die Fläche

$$\int_{a}^{a+rh} F(x)\, dx$$

in Parallelstreifen von der gemeinschaftlichen Breite h zerlegt, so beträgt sie weniger als die Summe der um die einzelnen Streifen beschriebenen Rechtecke, dagegen mehr als die Summe der eingeschriebenen Rechtecke.

$$\frac{1}{2}\int\limits_{2q}^{2p}\frac{n\xi . F(n\xi)}{\xi}d\xi < S^*_{n(p+q)} - S_{2nq} < \frac{1}{2}\int\limits_{2q}^{2p}\frac{n\xi . F(n\xi)}{\xi}d\xi + u_{2nq} - u_{2np}.$$

Nach dem Satze in § 22 III ist ferner, wenn $\varphi(\xi)$ endlich und stetig, $\psi(\xi)$ endlich, stetig und positiv bleibt von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \beta$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \varphi(\mu)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(\xi)\,d\xi, \quad \alpha < \mu < \beta,$$

und wenn man hiervon Gebrauch macht für

$$\varphi(\xi) = n\xi . F(n\xi), \quad \psi(\xi) = \frac{1}{\xi}, \quad \alpha = 2q, \quad \beta = 2p,$$

so gelangt man zu folgender Ungleichung:

$$\tfrac{1}{2} n\mu . F(n\mu) . l\left(\frac{p}{q}\right) < S^*_{n(p+q)} - S_{2nq}$$

$$< \tfrac{1}{2} n\mu . F(n\mu) . l\left(\frac{p}{q}\right) + u_{2nq} - u_{2np}.$$

Bei unendlich wachsenden n konvergieren u_{2nq} und u_{2np} gegen die Null; ferner wird auch $n\mu$ unendlich wegen $n\mu > n . 2q$; setzt man nun für unendlich wachsende ω

$$Lim\,[\omega F(\omega)] = K,$$

so erhält man aus der vorigen Ungleichung die Gleichung

$$S^* - S = \tfrac{1}{2} K l\left(\frac{p}{q}\right),$$

oder in Worten: Wenn in der konvergierenden Reihe

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_1 + \cdots$$

die Terme so umgestellt werden, dass immer p positive und q negative Terme aufeinander folgen, so ist die Summe der neuen Reihe

$$S^* = S + \frac{Lim(nu_n)}{2} l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Beispielsweise seien erwähnt die Summierungen:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2} l 6,$$

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \cdots = \tfrac{1}{2} l\left(\tfrac{8}{3}\right).$$

Im Falle

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

wird die neue Reihe divergent; bei der Reihe

$$S = \frac{1}{2l2} - \frac{1}{3l3} + \frac{1}{4l4} - \frac{1}{5l5} + \cdots$$

übt die Umstellung der Glieder keinen Einfluss auf die Summe aus.

4. Für ganze positive k und beliebige positive μ gilt die Formel (§ 10, Nr. 29)

$$\frac{1}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k-1)} = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{\mu-1}dx,$$

oder für $x = 1 - t$, $\mu = a + nb$

$$\frac{1}{(a+nb)(a+nb+1)(a+nb+2)\ldots(a+nb+k-1)}$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\int_0^1 t^{a+nb-1}(1-t)^{k-1}dt.$$

Multipliziert man beiderseits mit z^n und addiert alle für $n = 0$, 1, 2, 3, ... entstehenden Gleichungen, so gelangt man zu der Reihensummierung

$$\frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)} + \frac{z}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+k-1)}$$
$$+ \frac{z^2}{(a+2b)(a+2b+1)\ldots(a+2b+k-1)} + \cdots$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{k-1}}{1-zt^b}dt,$$

wobei b positiv und $z^2 \leqq 1$ sein muss.

Hiernach ist z. B. für $a = 1$, $b = 1$, $k = 3$,

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{z}{2.3.4} + \frac{z^2}{3.4.5} + \frac{z^3}{4.5.6} + \cdots$$
$$= \frac{3}{4z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{(1-z)^2}{2z^3}\, l\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

für $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $k = 3$,

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{z}{3.5.7} + \frac{z^2}{5.7.9} + \frac{z^3}{7.9.11} + \cdots$$
$$= \frac{1}{8z^2}\left\{\frac{(1-z)^2}{2\sqrt{z}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right) + \tfrac{5}{3}z - 1\right\}.$$

Anderweite spezielle Fälle sind:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots=l2-\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}-\cdots=\tfrac{1}{2}(1-l2),$$

$$\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\cdots=\tfrac{3}{4}-l2;$$

$$\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}-\cdots=\tfrac{1}{4}(\pi-3),$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{7.8.9}+\cdots=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-l3\right),$$

$$\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{6.7.8}+\frac{1}{10.11.12}+\cdots=\tfrac{1}{8}\pi-\tfrac{1}{2}l2,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{4.5.6.7}+\frac{1}{7.8.9.10}+\cdots=\tfrac{1}{6}\left(1+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)-\tfrac{1}{4}l3.$$

5. Nach der vorigen Methode ergiebt sich folgender allgemeinere Satz: Wenn eine Reihensummierung von der Form

$$C_0+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots=F(z)$$

bekannt ist, so gilt die Formel

$$\frac{C_0}{a(a+1)\ldots(a+k-1)}+\frac{C_1z}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+k-1)}$$
$$+\frac{C_2z^2}{(a+2b)(a+2b+1)\ldots(a+2b+k+1)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{k-1}F(zt^b)\,dt,$$

worin b positiv sein muss.

6. Setzt man in der Formel 43) des § 10:

$$\frac{1}{a^2}=\int_0^\infty z e^{-az}dz$$

der Reihe nach $a=1, 2, 3, \ldots p$, addiert alle entstehenden Gleichungen und benutzt die Substitution $1-e^{-z}=\zeta$, so erhält man

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}=\int_0^1\frac{1-(1-\zeta)^p}{\zeta}\,l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)d\zeta.$$

Durch Entwicklung des Logarithmus und Integration der einzelnen Terme wird hieraus

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}$$

$$=C-\frac{c_1}{p+1}-\frac{c_2}{(p+1)(p+2)}-\frac{c_3}{(p+1)(p+2)(p+3)}-\cdots$$

wobei die Konstanten folgende Werte haben:

$$C=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$c_1=1,\quad c_2=\tfrac{1}{2},\quad c_3=\tfrac{2}{3},\quad \ldots c_n=\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)}{n},\ldots$$

Übrigens kann man die Konstante C mittels der vorigen Gleichung selber bestimmen, indem man für p eine nicht zu kleine Zahl (etwa 20) wählt und die linke Seite, sowie die Summe aller negativen Terme rechter Hand numerisch berechnet; es folgt dann

$$C=1{,}64493\,40668.$$

Obschon die obige Gleichung nur als Transformation einer endlichen Reihe in eine unendliche gelten kann, so leistet sie doch bei grossen p vollkommen die Dienste einer eigentlichen Summenformel; z. B. für $p=99$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{99^2}=1{,}634\,8839.$$

7. Nach demselben Verfahren lässt sich aus der Integralformel

$$\frac{1}{a^3}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty z^2e^{-az}\,dz$$

die folgende Summenformel herleiten:

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{p^3}$$

$$=C-\frac{c_2}{(p+1)(p+2)}-\frac{c_3}{(p+1)(p+2)(p+3)}-\cdots,$$

worin die Konstanten folgende Werte haben:

$$C=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots=1{,}20205\,69032,$$

$$c_n=\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).$$

8. Die vorige Methode bedarf einer kleinen Modifikation, wenn man sie auf die Gleichung

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-az}\,dz$$

anwenden will. Zunächst ergiebt sich

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-pz}}{1 - e^{-z}}\,dz,$$

wobei das Integral in folgende drei Teile zerlegt werden kann:

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right\} e^{-z}\,dz$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-pz}}{z}\,dz - \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right\} e^{-pz}\,dz.$$

Der Wert des ersten Integrales hängt nicht von p ab und ist daher eine numerische Konstante, welche C heissen möge; der Wert des zweiten Integrals beträgt lp; im dritten Integral substituieren wir $1 - e^{-z} = \zeta$ und erhalten

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

$$= C + lp - \int_0^1 \left\{\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}\right\}(1-\zeta)^{p-1}\,d\zeta.$$

Hier lässt sich die in § 24 Nr. 12 abgeleitete Reihenentwicklung benutzen, und hierdurch erhält man für die rechte Seite

$$C + lp - \tfrac{1}{1}\cdot\frac{J_1}{p} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{J_2}{p(p+1)} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{J_3}{p(p+1)(p+2)} - \cdots$$

Durch beiderseitige Addition von $\frac{1}{p}$ wird schliesslich

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$$

$$= C + lp + \frac{1}{2p} - \frac{a_2}{p(p+1)} - \frac{a_3}{p(p+1)(p+2)} - \cdots,$$

worin die Konstanten folgende Werte haben:

$$C = 0{,}57721\,56649,$$

$$a_2 = \tfrac{1}{12}, \quad a_3 = \tfrac{1}{12}, \quad a_4 = \tfrac{19}{80}, \quad a_5 = \tfrac{9}{20}, \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)\,dx.$$

Beispielsweise findet sich

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{1000} = 7{,}4854\,7086,$$

woraus ersichtlich ist, mit welcher Langsamkeit die harmonische Reihe divergiert.

9. Von der Integralformel (§ 23 I Nr. 5)

$$lb = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-bz}}{z}\,dz$$

ausgehend erhält man zunächst

$$l1 + l2 + \cdots + l(p-1) = \int_0^\infty \left\{(p-1)e^{-z} - \frac{e^{-z} - e^{-pz}}{1 - e^{-z}}\right\}\frac{dz}{z},$$

oder hiermit identisch

$$l[1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)]$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}e^{-z} - \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}}\right\}\frac{dz}{z} + (p - \tfrac{1}{2})\int_0^\infty (e^{-z} - e^{-pz})\frac{dz}{z}$$

$$+ \int_0^\infty \left\{p\,e^{-pz} - \frac{1 - e^{-pz}}{z}\right\}\frac{dz}{z} + \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}\right\}\frac{1}{z}\,e^{-pz}\,dz.$$

Der Wert des ersten Integrals ist eine von p unabhängige numerische Konstante, welche C heissen möge; das zweite Integral hat den Wert lp; für das dritte ergiebt sich aus der unbestimmten Integralformel

$$\int \left\{p e^{-pz} - \frac{1 - e^{-pz}}{z}\right\}\frac{dz}{z} = \frac{1 - e^{-pz}}{z}$$

der Wert $-p$; im vierten setzen wir $1 - e^{-z} = \zeta$ und erhalten zusammen

$$l[1\,.\,2\ldots(p-1)] = C + (p - \tfrac{1}{2})lp - p$$

$$- \int_0^1 \left\{\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}\right\}\frac{(1-\zeta)^{p-1}}{l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}\,d\zeta.$$

Hier lässt sich die in § 24 am Ende von Nr. 13 erwähnte Entwicklung benutzen; sie giebt, wenn noch beiderseits lp addiert wird,

$$l(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p) = C + (p + \tfrac{1}{2})\, lp - p - \frac{b_1}{p} - \frac{b_2}{p(p+1)} - \cdots,$$

worin die Konstanten folgende Werte haben:

$$b_1 = -\tfrac{1}{12}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \tfrac{1}{360}, \quad b_4 = \tfrac{1}{120}, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{n}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)\,.\,(\tfrac{1}{2}-x)\,dx.$$

Den Wert von C kann man entweder aus der obigen Gleichung oder auf dieselbe Weise wie S. 441, Bd. I d. Compend. d. h. A. bestimmen; er ist $\frac{1}{2} l(2\pi)$.

Multipliziert man beiderseits mit dem Modulus M der gemeinen Logarithmen, so erhält man

$$log\,(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p) = \tfrac{1}{2} log\,(2\pi)$$
$$+ (p + \tfrac{1}{2})\, log\, p - M\left\{p - \frac{1}{12p} + \frac{1}{360p(p+1)(p+2)} + \cdots\right\}.$$

Beispielsweise ergiebt sich für $p = 1000$

$$log\,(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 1000) = 2567{,}604644,$$

woraus folgt, dass $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 1000$ eine Zahl von 2568 Ziffern ausmacht, deren acht höchste Ziffern sind 40238726.

10. Multipliziert man die leicht beweisbare Gleichung

$$\tfrac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \cdot \frac{cos\,(n+\frac{1}{2})\vartheta}{cos\,\frac{1}{2}\vartheta}$$
$$= cos\,\vartheta - cos\,2\vartheta + cos\,3\vartheta - \cdots + (-1)^{n-1} cos\, n\vartheta$$

mit $d\vartheta$, integriert von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \beta$ und wendet linker Hand die partielle Integration an, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\beta + \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\left\{\frac{sin\,(n+\frac{1}{2})\beta}{cos\,\frac{1}{2}\beta} - \int_0^\beta \frac{sin\,\frac{1}{2}\vartheta\; sin\,(n+\frac{1}{2})\vartheta}{2\,cos^2\frac{1}{2}\vartheta}\,d\vartheta\right\}$$
$$= \frac{sin\,\beta}{1} - \frac{sin\,2\beta}{2} + \frac{sin\,3\beta}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} sin\, n\beta}{n}.$$

Der Wert des noch übrigen Integrals liegt zwischen $-\,tan\,\frac{1}{2}\beta$ und $+\,tan\,\frac{1}{2}\beta$, er ist also von endlicher Grösse, wofern β innerhalb des Intervalles $-\pi$ bis $+\pi$ liegt; dies vorausgesetzt gelangt man für $n = \infty$ zu der Formel

$$\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{1} \sin \beta - \tfrac{1}{2} \sin 2\beta + \tfrac{1}{3} \sin 3\beta - \cdots$$
$$-\pi < \beta < +\pi,$$

die für $\beta = \pi - \alpha$ übergeht in

$$\tfrac{1}{2}(\pi - \alpha) = \tfrac{1}{1} \sin \alpha + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha + \tfrac{1}{3} \sin 3\alpha + \cdots$$
$$0 < \alpha < 2\pi.$$

Definiert man die Funktion Ω_x für alle reellen x durch die Gleichung

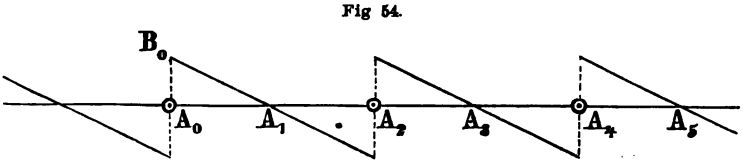
$$\Omega_x = \tfrac{1}{1} \sin x + \tfrac{1}{2} \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \ldots,$$

so ersieht man, dass für jedes ganze k

$$\Omega_{\xi + 2k\pi} = \Omega_\xi,$$

dass also Ω_x eine periodische Funktion ist, bei der sich die von 0 bis 2π vorhandenen Werte immer wiederholen. Für x als Ab-

Fig 54.



scisse und Ω_x als Ordinate entsteht das in Fig. 54 gegebene Bild; dabei ist A_0 der Koordinatenanfang, $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \ldots = \pi$, $A_0B_0 = \tfrac{1}{2}\pi$; an den Stellen A_2, A_4, $A_6, \ldots$ ändert sich der Linienzug sprungweise, sodass die Punkte A_0, A_2, $A_4, \ldots$ als isolierte Punkte auftreten. Für negative x ist $\Omega_{-x} = -\Omega_{+x}$.

Durch Multiplikation mit $d\alpha$ und Integration von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ ergiebt sich weiter

$$S_2 - \tfrac{1}{2}\pi\alpha + \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \frac{\cos \alpha}{1^2} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + \frac{\cos 3\alpha}{3^2} + \cdots,$$

$$S_2\alpha - \tfrac{1}{4}\pi\alpha^2 + \tfrac{1}{12}\alpha^3 = \frac{\sin \alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \frac{\sin 2\alpha}{3^3} + \cdots,$$

$$S_4 - \tfrac{1}{2}S_2\alpha^2 + \tfrac{1}{12}\pi\alpha^3 - \tfrac{1}{48}\alpha^4 = \frac{\cos \alpha}{1^4} + \frac{\cos 2\alpha}{2^4} + \frac{\cos 3\alpha}{3^4} + \cdots,$$

. . . .

worin S_2, $S_4, \ldots$ dieselben Bedeutungen haben wie in § 24 Nr. 18, und α zwischen 0 und 2π enthalten sein muss.

11. Zufolge der Periodizität von Ω_x lässt sich das Integral

$$\int_0^b F(x)\,\Omega_x\,dx$$

auf folgende Weise transformieren. Man betrachte die obere Grenze b als ein Vielfaches von 2π plus einem, weniger als 2π betragenden Reste, setze dem entsprechend $b = 2m\pi + \varrho$, zerlege das Integral nach dem Schema

$$\int_0^{2m\pi+\varrho} = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \int_{4\pi}^{6\pi} + \ldots + \int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi} + \int_{2m\pi}^{2m\pi+\varrho}$$

und substituiere rechter Hand im ersten Integrale $x = \xi$, im zweiten $x = 2\pi + \xi$, im dritten $x = 4\pi + \xi$ u.s.w.; dies giebt

$$\int_0^{2m\pi+\varrho} F(x)\Omega_x\,dx - \int_0^{\varrho} F(2m\pi + \xi)\,\Omega_\xi\,d\xi$$

$$= \int_0^{2\pi} \{F(\xi) + F(2\pi + \xi) + F(4\pi + \xi) + \ldots + F[(2m-2)\pi + \xi]\}\Omega_\xi\,d\xi.$$

Ist nun die Funktion $F(x)$ so beschaffen, dass für $m = \infty$

$$Lim \int_0^{\varrho} F(2m\pi + \xi)\,d\xi = 0$$

wird, so verschwindet auch das vorige Restintegral und bei unendlichem m wird

$$\int_0^{\infty} F(x)\,\Omega_x dx = \int_0^{2\pi} \{F(\xi) + F(2\pi + \xi) + F(4\pi + \xi) + \cdots\}\Omega_\xi\,d\xi$$

oder zufolge der Bedeutung von Ω_x und dem innerhalb des Intervalles 0 bis 2π geltenden Werte von Ω_ξ

$$\int_0^{\infty} F(x)\,[\tfrac{1}{1} \sin x + \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \cdots]\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\pi - \xi)[F(\xi) + F(\xi + 2\pi) + F(\xi + 4\pi) + \cdots]\,d\xi.$$

Diese Gleichung führt zu bemerkenswerten Reihensummierungen, wenn sich linker Hand der Wert jedes Integrales von der Form

$$\int_0^{\infty} F(x) \sin nx\,dx$$

finden lässt, und wenn ausserdem die Summe der Reihe $F(\xi) + F(\xi + 2\pi) + \cdots$ bekannt ist.

Ein Beispiel hierzu liefert die Annahme $F(x) = e^{-\varkappa x}$ für $\varkappa > 0$; es ergiebt sich

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{2\varkappa}{\varkappa^2 + 1^2} + \frac{2\varkappa}{\varkappa^2 + 2^2} + \frac{2\varkappa}{\varkappa^2 + 3^2} + \ldots = \pi\,\frac{e^{\varkappa\pi} - e^{-\varkappa\pi}}{e^{\varkappa\pi} + e^{-\varkappa\pi}}.$$

Lässt man $\frac{1}{2}\varkappa$ an die Stelle von $\varkappa$ treten und bildet die Differenz zwischen der neuen und der vorigen Gleichung, so erhält man

$$\frac{1}{\varkappa}-\frac{2\varkappa}{\varkappa^2+1^2}+\frac{2\varkappa}{\varkappa^2+2^2}-\frac{2\varkappa}{\varkappa^2+3^2}+\cdots=\frac{2\pi}{e^{\varkappa\pi}-e^{-\varkappa\pi}}$$

Die allgemeineren Annahmen $F(x)=e^{-\lambda x}\cos\mu x$ und $F(x) = e^{-\lambda x}\sin\mu x$, worin $\lambda>0$ sein möge, führen zu zwei Resultaten, die sich mittels der Bezeichnungen

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots=\sum_1^\infty u_n$$

$$\tfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})=cshp\,z,\quad \tfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})=snhp\,z$$

kurz folgendermassen darstellen lassen:

$$\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}+\sum_1^\infty\left\{\frac{\lambda}{\lambda^2+(n-\mu)^2}+\frac{\lambda}{\lambda^2+(n+\mu)^2}\right\}=\frac{\pi\, snhp\,2\lambda\pi}{cshp\,2\lambda\pi-\cos 2\mu\pi},$$

$$\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}-\sum_1^\infty\left\{\frac{n-\mu}{\lambda^2+(n-\mu)^2}+\frac{n+\mu}{\lambda^2+(n+\mu)^2}\right\}=\frac{\pi\sin 2\mu\pi}{cshp\,2\lambda\pi-\cos 2\mu\pi},$$

wie sich auch mittels der Substitution $\varkappa=\lambda+\mu\sqrt{-1}$ findet.

Ersetzt man λ und μ durch $\frac{1}{2}\lambda$ und $\frac{1}{2}\mu$, so erhält man durch Subtraktion

$$\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}+\sum_1^\infty(-1)^n\left\{\frac{\lambda}{\lambda^2+(n-\mu)^2}+\frac{\lambda}{\lambda^2+(n+\mu)^2}\right\}$$
$$=\frac{2\pi\, snhp\,\lambda\pi\cos\mu\pi}{cshp\,2\lambda\pi-\cos 2\mu\pi},$$

$$\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}-\sum_1^\infty(-1)^n\left\{\frac{n-\mu}{\lambda^2+(n-\mu)^2}-\frac{n+\mu}{\lambda^2+(n+\mu)^2}\right\}$$
$$=\frac{2\pi\, cshp\,\lambda\pi\sin\mu\pi}{cshp\,2\lambda\pi-\cos 2\mu\pi}.$$

Des Folgenden wegen sei noch erwähnt, dass diese vier Gleichungen für $\lambda\pi=\alpha$, $\mu\pi=\beta$ in die nachstehenden übergehen

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\sum_1^\infty\left\{\frac{\alpha}{\alpha^2+(n\pi-\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(n\pi+\beta)^2}\right\}$$
$$=\frac{snhp\,2\alpha}{cshp\,2\alpha-\cos 2\beta},$$

$$\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}-\sum_1^\infty\left\{\frac{n\pi-\beta}{\alpha^2+(n\pi-\beta)^2}-\frac{n\pi+\beta}{\alpha^2+(n\pi+\beta)^2}\right\}$$
$$=\frac{\sin 2\beta}{cshp\, 2\alpha-\cos 2\beta},$$

u. s. w.

Ein interessantes Beispiel für den allgemeinen Satz liefert die Annahme

$$F(x)=xe^{-\left(\frac{x}{2a}\right)^2}.$$

Aus der in § 23 II, Nr. 13 bewiesenen Formel

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos 2\beta x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}$$

erhält man durch Differentiation in Beziehung auf β und durch nachherige Substitution von $\alpha=\frac{1}{2a}$, $\beta=\frac{n}{2}$

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty xe^{-\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\sin nx\,dx=2\sqrt{\pi}\cdot a^3e^{-(na)^2}.$$

Mittels partieller Integration ($\pi-\xi$ als erster Faktor angesehen) ist ferner

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\pi-\xi)F(\xi+2n\pi)\,d\xi$$
$$=a^2\left\{\pi\left[e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}+e^{-\left(\frac{(n+1)\pi}{a}\right)^2}\right]-\int_0^{2\pi}e^{-\left(\frac{\xi+2n\pi}{2a}\right)^2}d\xi\right\},$$

wobei man bemerken möge, dass das letzte Integral unter der Form

$$2\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$$

dargestellt werden kann. Nach gehöriger Reduktion gelangt man zu folgendem Resultate

$$\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-(2a)^2}+e^{-(3a)^2}+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{\tfrac{1}{2}+e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}+e^{-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}+e^{-\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}+\cdots\right\},$$

welches für

$$e^{-a^2}=u,\quad e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}=v$$

auch so ausgesprochen werden kann: berechnet man aus dem positiven echten Bruche u den neuen Bruch v nach der Formel

$$lv = \frac{\pi^2}{lu},$$

so hat man die Relation

$$\tfrac{1}{2} + u + u^4 + u^9 + u^{16} + \cdots$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{-lu}} \left\{ \tfrac{1}{2} + v + v^4 + v^9 + v^{16} + \cdots \right\}.$$

Ist u nur wenig kleiner als die Einheit, so konvergiert die erste Reihe zu langsam für die numerische Berechnung, dann ist aber v ein sehr kleiner Bruch, mithin leistet die obige Gleichung in diesem Falle dieselben Dienste, wie eine eigentliche Summenformel. So ist z. B. für $u = \frac{1000}{1001}$

$$l\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{\pi^2}{l1001 - l1000} = \frac{9{,}8696044}{0{,}0009995} = 9874{,}54,$$

mithin $v = e^{-9874{,}54}$ eine so kleine Zahl, dass sie auf einige 1000 Stellen keinen Einfluss hat, daher

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1000}{1001} + \left(\frac{1000}{1001}\right)^4 + \left(\frac{1000}{1001}\right)^9 + \cdots = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{0{,}0009995}} = 28{,}03196.$$

Lässt man $2a$ an die Stelle von a treten, so erhält man durch Subtraktion

$$\tfrac{1}{2} - e^{-a^2} + e^{-(2a)^2} - e^{-(3a)^2} + \cdots$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a} \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{5\pi}{2a}\right)^2} + \cdots \right\}$$

oder

$$\tfrac{1}{2} - u + u^4 - u^9 + u^{16} - \cdots$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{-lu}} \left\{ w + w^9 + w^{25} + w^{49} + \cdots \right\},$$

worin w durch die Gleichung bestimmt ist

$$lw = \frac{\pi^2}{4lu}.$$

12. Die Resultate des vorigen Abschnitts können zur Transformation gewisser Integrale benutzt werden. Es sei nämlich $\varphi(x)$ eine periodische Funktion, die für jedes ganze positive k die Eigenschaft

$$\varphi(k\pi + \zeta) = \varphi(k\pi - \zeta) = \varphi(\zeta)$$

besitzt; ferner bezeichne q eine ganze positive Zahl und ϱ eine zwischen 0 und π enthaltene Grösse; das Integral

$$\int_0^{q\pi+\varrho} \frac{\alpha\varphi(x)}{\alpha^2+x^2}dx$$

zerlege man nun nach dem Schema

$$\int_0^{q\pi+\varrho} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + \cdots + \int_{\left(q-\frac{1}{2}\right)\pi}^{q\pi} + \int_{q\pi}^{q\pi+\varrho},$$

benutze rechter Hand die Substitutionen

$$x = \zeta,\ \pi - \zeta,\ \pi + \zeta,\ 2\pi - \zeta,\ 2\pi + \zeta, \ldots$$

und lasse schliesslich q unendlich wachsen; man erhält dann folgenden Satz: wenn

$$Lim \int_0^{\varrho} \frac{\alpha\varphi(\zeta)}{\alpha^2+(q\pi+\zeta)^2}d\zeta = 0$$

ist, so gilt die Transformation

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{snhp\,2\alpha}{cshp\,2\alpha - \cos 2\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Den angegebenen Bedingungen genügt z. B. $\varphi(x) = \cos 2x$; daher ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha\cos 2x}{\alpha^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}(cshp\,2\alpha - snhp\,2\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-2\alpha}$$

oder für $\alpha = \frac{1}{2}a\mu$, $x = \frac{1}{2}\mu\theta$

$$\int_0^{\infty} \frac{a\cos\mu\theta}{a^2+\theta^2}d\theta = \frac{\pi}{2}e^{-a\mu}$$

übereinstimmend mit dem Resultate in Nr. 16 des § 23 II.

Bezeichnet $\psi(x)$ eine periodische Funktion, welche die Eigenschaften

$$\psi(k\pi+\zeta) = \psi(\zeta), \quad \psi(k\pi-\zeta) = -\psi(\zeta)$$

besitzt, und ist ausserdem

$$Lim \int_0^{\varrho} \frac{(q\pi + \zeta)\psi(\zeta)}{\alpha^2 + (q\pi + \zeta)^2} d\zeta = 0,$$

so gilt die Transformation

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2} \psi(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin 2\zeta}{cshp\, 2a - \cos 2\zeta} \psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Beispielsweise ergiebt sich hieraus

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\alpha} \text{ und } \int_0^{\infty} \frac{\theta \sin \mu\theta}{a^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-a\mu},$$

übereinstimmend mit der Formel in Nr. 17 des § 23 II.

§ 26.

Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

I. Ist $f(x)$ eine ganze rationale Funktion höchstens vom 3. Grade, so ist genau

$$\int_a^b f(x)\, dx = \tfrac{1}{6}(b-a)\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Die Anwendung dieser Formel auf ein anderes bestimmtes Integral, unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ innerhalb des Intervalls endlich und stetig ist, giebt eine erste Annäherung.

II. Teilt man das Intervall von a bis b in $2n$ gleiche Teile $\frac{b-a}{2n}$, und ist

$$y_k = f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{2n}\right),$$

so gilt die als Simpson'sche Regel bekannte Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

$$= \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})].$$

Beispiele. 1. Es ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l2 = 0{,}69315,$$

die Formel I giebt $\frac{25}{36} = 0{,}69444$; die Formel II für $n = 2$:

$$\tfrac{1747}{2520} = 0{,}69325.$$

2. Es ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi = 0{,}78540;$$

man erhält nach I: $\frac{47}{60} = 0{,}78333$; nach II für $n = 2$:

$$\tfrac{8011}{10200} = 0{,}78539.$$

3. Es ist

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{6}\pi = 0{,}52360,$$

man erhält nach I: 0,52381; nach II für $n = 2$: 0,52364.

4. Durch Reihenentwicklung erhält man:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0{,}74682;$$

die Formel I giebt: 0,74718; die Formel II für $n = 2$: 0,74686.

5. Die Reihe auf S. 74 giebt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\omega}{\sin\omega}\,d\omega = 0{,}81353;$$

man erhält nach I: 0,81360; nach II für $n = 2$: 0,81354.

6. Es ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = 1{,}85409;$$

es ergiebt sich nach I: 1,84125; nach II für $n = 5$: 1,85409.

7. Es ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi}\,d\varphi = 1{,}46747;$$

die Formel I giebt: 1,46813; die Formel II für $n = 5$: 1,46747.

Das Integral giebt die Länge des Quadranten der Ellipse $x^2 + \frac{4}{3} y^2 = 1$ an; nach der S. 118 angegebenen Näherungsformel würde man erhalten: 1,46763.

8. Es ist, wenn *log* den gemeinen Logarithmus bedeutet:

$$\int_1^2 \log x\, dx = 0{,}16777;$$

entnimmt man aus 5stelligen Logarithmentafeln die Funktionswerte, so erhält man nach I: 0,16757; nach II für $n = 2$: 0,16775, für $n = 4$: 0,16776.

9. Ebenso ist

$$\int_5^0 \log x\, dx = 4{,}33368;$$

nach I erhält man: 4,33268; nach II für $n = 5$: 4,33367.

10. Für

$$\int_1^2 \frac{\log(1+x)}{x}\, dx$$

giebt I: 0,26829; II für $n = 2$: 0,26677, für $n = 4$: 0,26678.

11. Ebenso erhält man mit Hilfe von 5stelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für das Integral

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x\, dx$$

die Näherungswerte nach I: $-$ 0,096152; nach II für $n = 5$: $-$ 0,094850, für $n = 10$: $-$ 0,094848, für $n = 15$: $-$ 0,094846.

Kapitel VI.

Die Doppelintegrale und ihre geometrischen Anwendungen.

§ 27.

Allgemeine Formeln und Regeln.

1. Seiner ursprünglichen Bedeutung nach ist das bestimmte Doppelintegral

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy$$

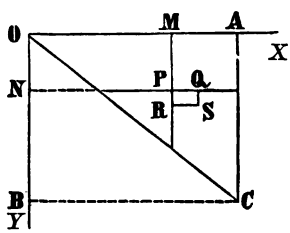
der Grenzwert einer Doppelsumme, deren einzelne Summanden die Form $f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$ haben; die Integrationsgrenzen bestimmen hierbei den Spielraum, der den unabhängigen Variabeln x und y gegönnt ist. Um dies zu veranschaulichen, kann man immer x und y als rechtwinklige Koordinaten eines willkürlichen Punktes der xy-Ebene betrachten und den erwähnten Spielraum mittels der Bedingungen

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad y_0 \leqq y \leqq Y$$

geometrisch konstruieren.

Handelt es sich z. B. um das Doppelintegral

Fig. 55.



$$V = \int_{0}^{a} \int_{0}^{\frac{b}{a}x} f(x, y)\, dx\, dy,$$

so zeigen die Bedingungen $0 \leqq x \leqq a$ und $0 \leqq y \leqq \frac{b}{a} x$, dass der Punkt xy die Peripherie des aus den Katheten $OA = a$ und $AC = b$ (Fig. 55) gebildeten rechtwinkligen Dreiecks OAC nicht überschreiten darf. Zerlegt man die Dreieckfläche durch Parallelen zur x-Achse und durch Parallelen zur y-Achse in Rechtecke, wie z. B. $PQRS$, so ist $OM = x$, $ON = y$,

$PQ = \Delta x$, $PR = \Delta y$, mithin $f(x, y)\Delta x \Delta y$ einer von den Summanden der Doppelsumme. Die ganze Schar der Summanden wird auf dieselbe Weise gebildet, indem man statt des Punktes P der Reihe nach die Ecken aller innerhalb des Dreiecks liegender Rechtecke nimmt und die Rechteckseiten als die Zunahmen von x und y ansieht. Schliesslich ist V der Grenzwert, gegen den die Doppelsumme $\Sigma\Sigma f(x, y)\Delta x \Delta y$ konvergiert, sobald die Abstände der Parallelen, d. h. alle Δx und Δy unendlich abnehmen.

Als weitere Beispiele für die Interpretation der Integrationsgrenzen mögen folgende dienen. Ist

$$x_0 = 0, \quad X = a; \quad y_0 = 0, \quad Y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

so bleibt der Punkt xy innerhalb eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b vom Koordinatenanfange aus auf den Koordinatenachsen abgeschnitten sind.

Die Integrationsgrenzen

$$x_0 = 0, \quad X = 2a; \quad y_0 = 0, \quad Y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

bedeuten, dass der Spielraum des Punktes xy eine Halbellipse ist, deren Scheitel im Koordinatenanfange liegt.

Den Integrationsgrenzen

$$x_0 = -a, \quad X = +a; \quad y_0 = -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad Y = +b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

entspricht eine volle Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt. Die Integrationen beziehen sich dann auf alle positiven und negativen x und y, die der Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$$

Genüge leisten.

2. Wenn sich die auf y bezügliche Integration, bei welcher x als Konstante anzusehen ist, ausführen lässt, so kommt das Doppelintegral auf ein einfaches Integral zurück, dessen Wert dann einer weiteren Untersuchung bedarf.

Mit Hilfe der Integralformel

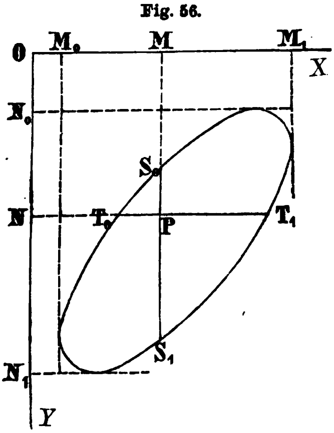
$$\int \sqrt{k^2 - y^2} \cdot dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{k^2 - y^2} + k^2 \arcsin \frac{y}{k}\right)$$

findet man z. B.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left\{ (1-x)\sqrt{x} + (1-x^2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right\} dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{4}{15} + \tfrac{32}{45}\right] = \tfrac{22}{45}.$$

3. Die Reihenfolge der Integrationen lässt sich umkehren, wenn man die Integrationsgrenzen auf die gehörige Weise ändert. Besteht der Spielraum für x und y aus einer geschlossenen ebenen Fläche, deren Peripherie von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden kann (Fig. 56), so bestimmen sich die Integrationsgrenzen für $OM = x$ und $ON = y$ auf folgende Weise. Man integriert entweder zuerst in Beziehung auf y und dann nach x; in diesem Falle geht y von $MS_0 = y_0$ bis $MS_1 = Y$, nachher x von $OM_0 = x_0$ bis $OM_1 = X$. Wählt man dagegen die umgekehrte Anordnung der Integrationen, so ist $NP = x$ bis zu den Durchschnitten T_0 und T_1 mit der gegebenen Peripherie zu verlängern und $NT_0 = \xi_0$, $NT_1 = \Xi$ sind die Grenzen für x; die Grenzen für y sind nachher der kleinste und grösste Wert des y, nämlich $ON_0 = \eta_0$ und $ON_1 = T$. Dies giebt

Fig. 56.



$$\int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\eta_0}^{T} \int_{\xi_0}^{\Xi} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Am einfachsten wird die Sache, wenn der Integrationsbereich aus einem Rechtecke besteht, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen; es ist dann

$$\int_{a_0}^{a} \int_{b_0}^{b} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{b_0}^{b} \int_{a_0}^{a} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Fernere Beispiele sind:

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^b \int_{\frac{a}{b}y}^{a} f(x,y)\, dy\, dx.$$

$$\int_0^{2a}\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{b}\int_{a-a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{a+a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Übrigens ist zu beachten, dass solche Umänderungen nur dann unzweifelhaft gelten, wenn die Funktion $f(x,y)$ innerhalb des Integrationsbereichs endlich und stetig bleibt.

4. Will man in einem Doppelintegrale statt einer der beiden Variabeln x und y eine neue Variable einführen, so hat man ebenso wie bei einfachen Integralen zu verfahren.

Mittels der Substitution

$$y = y_0 + (Y - y_0)t$$

erhält man z. B.

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X}\int_0^1 (Y-y_0)f(x,y_0+[Y-y_0]t)\,dx\,dt,$$

was häufig sehr vorteilhaft ist.

Mittels desselben Verfahrens lassen sich auch zwei neue Variable nach einander einführen. Setzt man z. B. in

$$V = \int_{-a}^{+a}\int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

zuerst $y = b\eta$, so geht das Integral über in

$$V = b\int_{-a}^{+a}\int_{-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,b\eta)\,dx\,d\eta,$$

und durch Substitution von $x = a\xi$ erhält man schliesslich bei Zusammenstellung des ersten und letzten Wertes von V

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ab\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}} f(a\xi,b\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Hiermit ist das Integral, dessen Integrationsbereich eine Ellipse bildet, auf ein Integral mit kreisförmigem Integrationsbereich zurückgeführt.

Die nämlichen Substitutionen geben

$$\int_0^{2a}\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ab\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2\xi-\xi^2}} f(a\xi, b\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

was einer ähnlichen Reduktion wie vorhin entspricht.

Wenn in dem Integrale

$$V=\int\int f(x,y)\,dx\,dy,$$

dessen Grenzen nachher untersucht werden sollen, statt x und y die neuen Variabeln r und θ mittels der Gleichungen

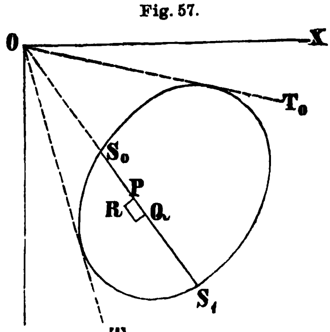
$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

einzuführen sind, so substituiere man erst $y = x\tan\theta$, nachher $x = r\cos\theta$; dies giebt

$$\begin{aligned} V &= \int\int f(x, x\tan\theta)\,dx\,.\,x\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \int\int f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\,dr\,.\,r\cos\theta\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \int\int f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr. \end{aligned}$$

Diese Transformatiou hat den Sinn, dass man sich den Spielraum der x und y nicht mehr in Rechtecke, sondern in Vierecke zerlegt denkt, deren jedes von zwei konzentrischen Kreisbögen und zwei Radien begrenzt wird. An die Stelle der früheren Rechtecksfläche $dx\,.\,dy$ tritt nun eine unendlich kleine Fläche, die als ein aus den Seiten $PQ = dr$ und $PR = r\,d\theta$ gebildetes Rechteck gelten kann (Fig. 57). Die Integrationsgrenzen für r und θ erhält man dadurch, dass man erst r bis zu seinen Durchschnitten S_0 und S_1 mit der Peripherie des Integrationsbereichs verlängert und nachher dem θ seinen grössten und kleinsten Wert giebt.

Fig. 57.



Für $OS_0 = r_0$, $OS_1 = R$, $\angle XOT_0 = \theta_0$, $\angle XOT_1 = \Theta$ ist nun

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\Theta}\int_{r_0}^{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Als Beispiele eines solchen Übergangs von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten mögen dienen:

$$\int_0^c \int_0^{\sqrt{c^2-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^c f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr,$$

$$\int_0^{2c} \int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2c\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Das letzte Integral kann man auch so transformieren, dass man erst $x = x_1 - c$ und nachher $x_1 = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$ setzt, was einen leicht erkennbaren geometrischen Sinn hat; man erhält

$$\int_0^{2c} \int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \int_0^c f(r\cos\omega - c, r\sin\omega)\,r\,d\omega\,dr.$$

Wendet man erst die Substitutionen $x = a\xi$, $y = b\eta$ an und geht dann zu Polarkoordinaten über, so gelangt man zu folgenden allgemeineren Transformationen:

$$\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr,$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{b\sqrt{2\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\cos\theta} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

$$= ab\int_0^{\pi} \int_0^1 f(ar\cos\omega - a, br\sin\omega)\,r\,d\omega\,dr.$$

Um ganz allgemein statt x und y zwei neue Variable s und t einzuführen, die mit x und y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(s,t), \quad y = \psi(s,t)$$

verbunden sind, hat man folgende Formel anzuwenden:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint f[\varphi(s,t), \psi(s,t)]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) ds\,dt.$$

Die für s und t geltenden Integrationsgrenzen müssen jederzeit durch eine besondere Untersuchung ermittelt werden.

§ 28.

Kubaturen durch Doppelintegrale in rechtwinkligen Koordinaten.

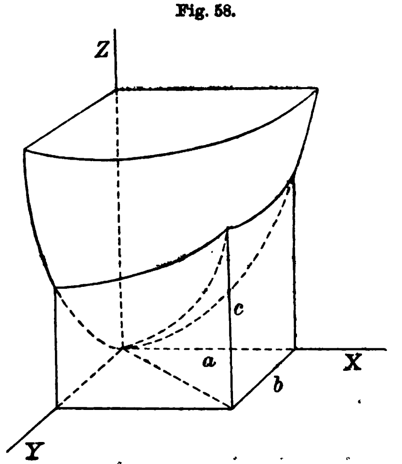
In der Horizontalebene xy sei durch gerade oder krumme Linien eine geschlossene Figur begrenzt, und durch alle Punkte ihrer Peripherie mögen Senkrechte zur Ebene xy gelegt sein; wird nun der so entstandene Cylinder von einer durch die Gleichung $z = f(x, y)$ bestimmten Fläche geschnitten, so entsteht ein Cylindervolumen, dessen Basis jene ebene Figur, und dessen obere Begrenzung von der letzterwähnten Fläche gebildet ist. Ferner kann das Cylindervolumen als Summe einer unendlich grossen Menge prismatischer Volumenelemente angesehen werden, von denen irgend eines den Inhalt $z\,dx\,dy$ besitzt, falls man sich die Cylinderbasis in unendlich kleine Rechtecke zerlegt denkt, deren Seiten parallel zu den Achsen der x und y liegen. Hiernach ist das gesuchte Volumen

$$V = \int\!\!\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

wobei die Cylinderbasis den Integrationsbereich für x und y bildet.

Wenn $z = f(x, y)$ innerhalb des ganzen Integrationsbereichs negativ ist, so wird auch V negativ; entgegengesetzte Vorzeichen von V bedeuten demgemäss entgegengesetzte Lagen. Im Fall die Fläche teils über, teils unter der xy-Ebene liegt, besteht das Volumen aus einem positiven und einem negativen Teile; die obige Formel giebt dann die algebraische Summe der beiden Teile. Um die arithmetische Summe zu erhalten, muss man jeden Teil einzeln berechnen und deren absolute Werte addieren.

Fig. 58.



Beispiele. 1. Die Cylinderbasis sei wie in § 27 Nr. 1 ein aus den Katheten $OA = a$, $AC = b$ konstruiertes rechtwinkliges Dreieck, die obere Begrenzungsfläche ein Paraboloid (Fig. 58) mit der Gleichung

$$z = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2);$$

für das Volumen, welches V_a heissen möge, ergiebt sich dann

$$V_a = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}x}(Ax^2 + By^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left\{Ax^2\cdot\frac{b}{a}x + \frac{1}{3}B\frac{b^3}{a^3}x^3\right\}dx = \frac{1}{8}ab(Aa^2 + \frac{1}{3}Bb^2).$$

Nimmt man dagegen als Basis das rechtwinklige Dreieck aus den Katheten $OB = b$, $BC = a$, so erhält man

$$V_b = \frac{1}{8}ab(\frac{1}{3}Aa^2 + Bb^2).$$

Die Summe beider Volumina giebt den Inhalt eines Parallelepipeds über dem Rechteck $OACBO$, nämlich

$$V = \frac{1}{6}ab(Aa^2 + Bb^2) = \frac{1}{3}abc,$$

wo c das zu $x = a$ und $y = b$ gehörende z bedeutet. Dasselbe Resultat findet sich direkt aus

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b(Ax^2 + By^2)\,dx\,dy.$$

2. Die Basis des gesuchten Volumens werde von den positiven Teilen der beiden Koordinatenachsen und von einer Parabel eingeschlossen, die auf der x-Achse die Strecke $OA = a$, auf der y-Achse die Strecke $OB = b$ abschneidet, deren Achse die y-Achse und deren Scheitel B ist; die begrenzende Fläche sei dieselbe wie vorhin. Das Volumen über AOB beträgt dann

$$V = \frac{1}{105}ab(7Aa^2 + 8Bb^2).$$

3. Wird die vorige Aufgabe so abgeändert, dass die Parabelachse mit der x-Achse und der Scheitel mit A zusammenfällt, so findet sich

$$V = \frac{1}{105}ab(8Aa^2 + 7Bb^2).$$

4. In der Horizontalebene sei eine Parabel gezeichnet, welche die x-Achse im Punkte A, die y-Achse im Punkte B berührt und im übrigen zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen enthalten ist; die dreieckige Fläche OAB werde als Basis des Volumens genommen, dessen obere Begrenzung wieder das vorige Paraboloid sein möge. Für $OA = a$, $OB = b$ ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{168} ab(Aa^2 + Bb^2) - \tfrac{1}{84} abc,$$

wo c dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 1.

5. Die Basis des Volumens sei eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse, deren grosse Achse $2a$ in die x-Achse fällt und deren Mittelpunkt die Koordinaten a und 0 besitzt; die Begrenzungsfläche sei das Paraboloid; es ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{8}\pi ab(5Aa^2 + Bb^2).$$

6. Die Basis des Volumens sei von den positiven Teilen der Koordinatenachsen und ausserdem von derjenigen Kurve begrenzt, deren Gleichung ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 1;$$

die Begrenzungsfläche sei das vorige Paraboloid. Beachtet man, dass hier

$$Y = b\sqrt[4]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}$$

ist, so erhält man nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \frac{b}{2a^3}\int_0^a \left\{Aa^2x^2 + \tfrac{1}{3}Bb^2\sqrt{a^4 - x^4}\right\}\sqrt[4]{a^4 - x^4}\cdot dx.$$

Durch Substitution von

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a^4 - x^4}} = t \quad \text{oder} \quad x = \frac{at}{\sqrt[4]{1 + t^4}}$$

geht die vorige Gleichung über in

$$V = \tfrac{1}{2}ab\left\{Aa^2\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1 + t^4)^2} + \tfrac{1}{3}Bb^2\int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^4)^2}\right\}$$

oder, wenn c dasselbe wie in Nr. 1 bedeutet,

$$V = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}abc.$$

7. Ein elliptischer Kegel, dessen Gleichung

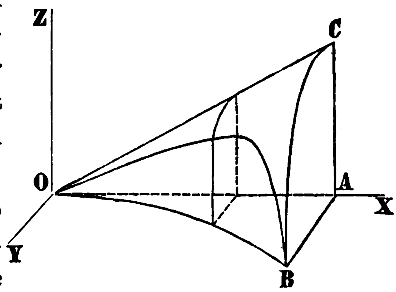
$$z^2 = Mx^2 - Ny^2$$

sein möge, wird von einem vertikalen, durch die Gleichung

$$ky = x^2$$

bestimmten parabolischen Cylinder geschnitten; man verlangt das Volumen desjenigen Körpers, der von den positiven Teilen der Koordinatenebenen xy und xz von den beiden krummen Flächen und ausserdem von einer Ebene begrenzt wird, die parallel zur Ebene yz durch den Schnittpunkt der Horizontalspuren beider Flächen geht (Fig. 59).

Fig. 59.



Sind $OA = a$ und $AB = b$ die Koordinaten des Spurendurchschnittes B und wird $AC = c$ gesetzt, so ist

$$V = \int_0^a \int_0^{b\left(\frac{x}{a}\right)^2} c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \cdot dx\, dy.$$

Nach Ausführung der ersten Integration substituiere man $x = a\xi$; es wird dann

$$V = \tfrac{1}{2} abc \left\{ \int_0^1 \xi^3 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot d\xi + \int_0^1 \xi^2 \arcsin \xi\, d\xi \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn K das Volumen des Kegelquadranten $OABC$ bezeichnet,

$$K - V = \tfrac{2}{45} abc.$$

8. In der vorigen Aufgabe ersetze man die Parabel OB durch eine semikubische Parabel, deren Gleichung von der Form

$$ky^2 = x^3$$

sein möge; dann ergiebt sich, wenn nach der Ausführung der ersten Integration $x = a\zeta^2$ substituiert wird,

$$V = abc \left\{ \int_0^1 \zeta^6 \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot d\zeta + \int_0^1 \zeta^5 \arcsin \zeta\, d\zeta \right\} = \tfrac{59}{64} K.$$

9. Nimmt man in der vorigen Aufgabe statt der Basis OAB den Quadranten der schleifenförmigen, durch die Gleichung

$$a^4 y^2 = b^2 x^2 (a^2 - x^2)$$

bestimmten Kurve, so erhält man

$$V = \tfrac{8}{45}\, abc.$$

10. Der in Nr. 2 erwähnte parabolische Cylinder werde von einem durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

bestimmten Ellipsoid geschnitten; das Cylindervolumen ist dann

$$V = \tfrac{22}{45}\, abc.$$

11. Wenn der in Nr. 3 erwähnte parabolische Cylinder von demselben Ellipsoid wie vorhin geschnitten wird, so ist das Cylindervolumen von derselben Grösse wie in Nr. 10.

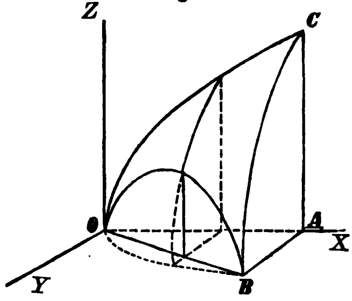
12. Aus den Halbachsen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ sei eine Halbellipse konstruiert, deren grosse Achse a mit der gleichnamigen Halbachse des vorigen Ellipsoids zusammenfällt; wird nun diese Halbellipse als Basis eines cylindrischen Volumens V, und das Ellipsoid als obere Begrenzungsfläche genommen, so ist, wenn E das Volumen des Ellipsoidoktanten bezeichnet,

$$E - V = \tfrac{2}{9}\, abc.$$

13. Als Basis werde der zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen liegende Quadrant der in Nr. 9 erwähnten schleifenförmigen Kurve genommen; die obere Begrenzungsfläche sei das vorige Ellipsoid; es ist dann

$$E - V = \tfrac{13}{45}\, abc.$$

Fig. 60.



14. In dem elliptischen Paraboloid, dessen Gleichung

$$x = My^2 + Nz^2$$

sein möge, ist am Ende der Strecke $OA = a$ ein zur Paraboloidachse senkrechter Querschnitt ABC (Fig. 60) und durch OB eine auf der xy-Ebene senkrechte Ebene gelegt; man sucht das Volumen, welches von den Ebenen OAB, OAC, ABC der genannten Vertikalebene und dem Paraboloid begrenzt wird.

Man kann hier ebensowohl

$$V=\frac{1}{\sqrt{N}}\int\limits_0^a\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{Ma}}}\sqrt{x-My^2}\,.\,dx\,dy$$

als bei umgekehrter Anordnung der Integrationen

$$V=\frac{1}{\sqrt{N}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a}{M}}}\int\limits_{\sqrt{Ma}\,.\,y}^{a}\sqrt{x-My^2}\,.\,dy\,dx$$

setzen, wobei in die Augen fällt, dass die zweite Form weit bequemer als die erste ist. Man erhält

$$V=\frac{2}{3\sqrt{N}}\left\{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a}{M}}}\sqrt{(a-My^2)^3}\,.\,dy-\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a}{M}}}\sqrt{(\sqrt{Ma}\,.\,y-My^2)^3}\,.\,dy\right\},$$

oder, wenn im ersten Integrale $y=\sqrt{\frac{a}{M}}\cdot\sin\varphi$, und im zweiten $y=\sqrt{\frac{a}{M}}\cdot\sin^2\frac{1}{2}\psi$ gesetzt wird,

$$V=\frac{2a^2}{3\sqrt{MN}}\left\{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi-\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}\sin^4\psi\,d\psi\right\}=\frac{7\pi a^2}{64\sqrt{MN}}.$$

Für $AB=b$, $AC=c$ hat man auch

$$V=\tfrac{7}{64}\pi\,a\,b\,c.$$

15. Ein durch die Gleichung

$$2x=\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}$$

bestimmtes elliptisches Paraboloid werde von einem vertikalen elliptischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$y^2=2bx-\frac{b}{a}x^2,$$

also im Scheitel dieselbe Krümmung besitzt, wie die Horizontalspur der Fläche; man verlangt das Volumen, welches die von $x=0$ bis $x=2a$ reichende Halbellipse zur Basis und das Paraboloid zur oberen Begrenzungsfläche hat.

Integriert man zuerst in Beziehung auf x und beachtet, dass der Ausdruck

$$2ab + 2\sqrt{ab(ab - y^2)} - y^2$$

ein vollständiges Quadrat ist, so erhält man

$$V = \tfrac{5}{8}\pi a^2 \sqrt{bc}.$$

16. Die obere Begrenzungsfläche eines Volumens sei wieder das vorige Paraboloid, dagegen die Basis ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt A auf der x-Achse in der Entfernung $OA = a$ liegt, und dessen Peripherie die Horizontalspur des Paraboloids berührt.

Mittels der Bemerkung, dass

$$2ab - y^2 + 2b\sqrt{2ab - b^2 - y^2}$$

ein vollständiges Quadrat ist, findet sich

$$V = \tfrac{1}{8}\pi(2a - b)(2a + 3b)\sqrt{bc}.$$

17. Über dem von den positiven Teilen der Koordinatenachsen eingeschlossenen Quadranten der Lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

stehe ein Cylindervolumen, welches durch eine aus dem Koordinatenanfange mit dem Radius a konstuierte Kugelfläche begrenzt wird; man sucht die Grösse jenes Volumens.

In rechtwinkligen Koordinaten ist

$$V = \int_0^a\int_0^Y \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}\,.\,dx\,dy,$$

wobei Y die reelle positive Wurzel der Lemniskatengleichung bedeutet; einfacher hat man in Polarkoordinaten

$$V = \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{a^2 - r^2}\,.\,r\,d\theta\,dr = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{4\sqrt{2} - 5}{9}\right)a^3.$$

18. Verallgemeinert man die vorige Aufgabe dahin, dass an die Stelle der Lemniskate die Fusspunktkurve einer aus den Halbachsen a und $b < a$ konstruierten Hyperbel gesetzt wird, so folgt

$$V = \tfrac{1}{3}a^3 \arctan\frac{a}{b} - \tfrac{1}{9}\{2\sqrt{(a^2 + b^2)^3} - (3a^2 + 2b^2)b\}.$$

19. In der Horizontalebene sei zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen der Quadrant von der Fusspunktkurve einer

aus den Halbachsen a und $b < a$ konstruierten Ellipse als Basis eines Cylinders genommen, der oberhalb durch das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

begrenzt wird; man sucht den Rest, welcher übrig bleibt, wenn jenes Cylindervolumen vom Ellipsoidoktanten weggenommen wird.

Der fragliche Rest beträgt

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{c\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}{a}.$$

20. Das vorige Rotationsellipsoid, dessen Horizontalspur ein mit dem Radius a beschriebener Kreis ist, werde zur oberen Begrenzungsfläche genommen; in der Horizontalebene sei durch die Gleichung $R = b\theta$ eine Archimedische Spirale bestimmt, die den erwähnten Kreis im Punkte D durchschneidet, und es werde nun als Volumenbasis die dreieckige Fläche zwischen dem positiven Teile der x-Achse, dem abgeschnittenen Kreisbogen und dem Spiralbogen OD gewählt.

Das gesuchte Volumen ist

$$V = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 c}{b}.$$

21. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Archimedischen Spirale die parabolische Spirale treten, deren Gleichung $R = b\sqrt{\theta}$ ist, so erhält man

$$V = \frac{2}{15} \cdot \frac{a^4 c}{b^2}.$$

22. Ein aus den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ konstruiertes Ellipsoid werde von einer Ebene geschnitten, welche die z-Achse in sich enthält und mit der Ebene AOC den Winkel γ einschliesst; der Punkt, in dem die Horizontalspur dieser Ebene den Ellipsenquadranten AB trifft, heisse J, seine Abscisse $OH = h$; man sucht den Inhalt V_1 des über den Ellipsensektor AOJ stehenden Ellipsoidsektors.

Für $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ erhält man

$$V_1 = c\int_0^\gamma \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) r^2}\,.\, r\,d\theta\,dr,$$

wobei die obere Integrationsgrenze R durch die Formel

$$R = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

bestimmt ist; die Ausführung der Integrationen giebt

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\, acb\,.\, arctan\left(\frac{a}{b}\, tan\, \gamma\right) = \tfrac{1}{3}\, abc\,.\, arccos\, \frac{h}{a}.$$

Subtrahiert man hiervon den über dem Ellipsensegmente AHJ stehenden Teil des Ellipsoids, nämlich

$$V_2 = \frac{\pi b c}{4a^2}\int_h^a (a^2 - x^2)\, dx,$$

und setzt zur Abkürzung $\frac{h}{a} = \lambda$, so erhält man den über dem Dreiecke OHJ stehenden Teil des Ellipsoids

$$V_3 = [\tfrac{1}{4}\pi(\lambda - \tfrac{1}{3}\lambda^3) - \tfrac{1}{3}\, arcsin\, \lambda]\, abc.$$

Derselbe erreicht sein Maximum für

$$\lambda = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

23. Das vorige dreiachsige Ellipsoid werde von einem vertikalen Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse die z-Achse, und dessen Radius die Halbachse $b < a$ ist; man sucht das über dem Kreisquadranten stehende Cylindervolumen, welches das genannte Ellipsoid zur oberen Begrenzungsfläche hat.

Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad s^2 = \left(\frac{cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{sin\theta}{b}\right)^2,$$

so ist in Polarkoordinaten

$$V = c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^b \sqrt{1 - s^2 r^2}\,.\, r\, d\theta\, dr = \tfrac{1}{3} b^2 c \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1}{1 + \varepsilon\, cos\theta} + \varepsilon\, cos\theta\right) d\theta$$

und durch Einführung eines Hilfswinkels γ

$$V = \tfrac{1}{6}\, abc\,(\gamma + sin\gamma), \quad sin\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b}{a}.$$

24. Eine Ebene sei derartig gelegt, dass sie die y-Achse in sich enthält und das vorige Ellipsoid, bei dem $a > b > c$ sein möge, in einem Kreise schneidet; der Durchschnitt jener Ebene mit der elliptischen Vertikalspur AC heisse D. Legt man durch alle Punkte des Kreisquadranten BD Gerade parallel OC, so entsteht ein Cylinderquadrant, dessen Horizontalspur ein Ellipsenquadrant $A_1 B$ ist. Gesucht wird das innerhalb des Ellipsoids liegende Stück des Cylinderquadranten, welches den Ellipsenquadranten $A_1 OB$ zur Basis und das ellipsoidische Dreieck BCD zur Deckfläche hat.

Es ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{3} abc \left\{ \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{a^2 - c^2} \right\},$$

oder, wenn der Hilfswinkel δ mittels der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

bestimmt wird,

$$V = \tfrac{1}{6} abc (\delta + \sin \delta).$$

25. In der xy-Ebene sei ein Halbkreis konstruiert, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, und dessen Peripherie sowohl die y-Achse als die Horizontalspur des vorigen Ellipsoids berührt; man sucht das Volumen des vertikalen Halbcylinders, der jenen Halbkreis zur Basis und das genannte Ellipsoid zur oberen Begrenzungsfläche hat.

Werden die vorigen Abkürzungen wieder benutzt, so ergiebt sich in Polarkoordinaten nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \tfrac{1}{3} c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \sqrt{(1 - 4\varepsilon^2 b^2 s^2 \cos^2 \theta)^3}}{s^2} \, d\theta$$

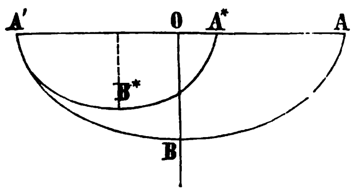
und schliesslich, weil $1 - 4\varepsilon^2 b^2 s^2 \cos^2 \theta$ ein vollständiges Quadrat ist,

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2a^4 - (a + b) b (a^2 - 3b^2)}{a^4} (a - b) bc.$$

Zur Möglichkeit der Lösung gehört übrigens die Bedingung, dass a nicht kleiner als $b\sqrt{2}$ ist.

26. Es sei wieder das vorige Ellipsoid gegeben und ABA' (Fig. 61) die Hälfte seiner Horizontalspur, ferner sei eine zweite Halbellipse A^*B^*A' konstruiert, deren Achse die x-Achse, deren Brennpunkt der Koordinatenanfang O ist, und die mit der Ellipse ABA' den Halbparameter, sowie den Scheitel A' gemein hat; man verlangt das vom Ellipsoid begrenzte über der dreieckigen Fläche $ABA'B^*A^*$ stehende Volumen.

Fig. 61.



In Polarkoordinaten ergiebt sich nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \tfrac{1}{3} b^2 c \varepsilon^3 \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos\theta}{1+\varepsilon^2\cos\theta}\right)^3 \frac{d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta},$$

oder, wenn

$$\frac{b\varepsilon^3}{a} \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos\theta}{1+\varepsilon^2\cos\theta}\right)^3 \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = f(\varepsilon)$$

gesetzt wird,

$$V = \frac{abc}{3} \cdot \frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2}.$$

Das mit $f(\varepsilon)$ bezeichnete Integral lässt sich mittels der Substitution

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\omega$$

auf folgende Form bringen

$$f(\varepsilon) = 16\varepsilon^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^6\omega\, d\omega}{[(1+\varepsilon^2)\cos^2\omega + (1+\varepsilon)^2\sin^2\omega]^3},$$

woraus sein Wert nach der Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^6\omega\, d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3\beta^2 + 9\beta\alpha + 8\alpha^2}{(\beta+\alpha)^3\alpha^5}$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3\beta^5 - 10\beta^3\alpha^2 + 15\beta\alpha^4 - 8\alpha^5}{(\beta^2-\alpha^2)^3\alpha^5}$$

erhalten wird; schliesslich ist

$$V = \tfrac{1}{6}\pi a b c \frac{\varepsilon^3(5 + 2\varepsilon^2)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)^5}}.$$

27. In der Horizontalebene sei die Fusspunktkurve einer Ellipse konstruiert, deren Halbachsen

$$a_1 = \frac{2k\sqrt{a^2 - k^2}}{a}, \quad b_1 = \frac{2k\sqrt{b^2 - k^2}}{b}$$

sind, und wobei k eine beliebige Gerade $< b < a$ bezeichnet; gesucht wird das Volumen, welches oberhalb durch das vorige Ellipsoid begrenzt wird und dessen Basis die ringförmige Fläche zwischen der Horizontalspur des Ellipsoids und jener Fusspunktkurve ist.

Benutzt man die Abkürzungen

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad K = \frac{1}{k^2}, \quad S = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta,$$

so erhält man nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \tfrac{4}{3}\cdot\frac{c}{K^3}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(2S-K)^3}{S}\,d\theta$$

und schliesslich

$$V = \tfrac{2}{3}\pi c\left\{\frac{3(A+B)^2 - 10AB + 6(K-A)(K-B)}{K^3} - \frac{1}{\sqrt{AB}}\right\}.$$

28. Das vorige Ellipsoid werde durch eine Schar von Ebenen geschnitten, welche die kleinste Halbachse c in sich enthalten; die Brennpunkte aller dieser Vertikalschnitte bilden in der horizontalen xy-Ebene eine geschlossene Linie (Fokalkuve); man sucht das Volumen des ringförmigen Körpers, welcher übrig bleibt, wenn der über der Fokalkurve konstruierte gerade Cylinder von dem Ellipsoide weggenommen wird.

Durch Einführung von Polarkoordinaten ergiebt sich

$$V = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{c^4}{ab}U,$$

worin U den Umfang der Horizontalspur des Ellipsoids bezeichnet.

Für das einfache Hyperboloid gilt ein analoger Satz.

29. Ein einfaches Hyperboloid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und worin $a > b$ sein möge, wird von einem Kreiscylinder geschnitten, der die z-Achse zur Achse und a zum Radius hat; man sucht das cylindrische Volumen zwischen der Ebene xy und dem Hyperboloid.

Dasselbe beträgt

$$V = \tfrac{2}{3} abc \left\{ \frac{2a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} - l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right) \right\},$$

oder unter Benutzung eines Hilfswinkels δ

$$V = \tfrac{2}{3} abc\{\tan 2\delta - l \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \delta)\}, \quad \tan\delta = \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a}.$$

30. In die elliptische Horizontalspur des vorigen Hyperboloids ist eine Gerade von der konstanten Länge $2h < 2b$ als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Ellipse gelegt; die Durchschnitte dieser Tangenten bilden eine geschlossene Kurve (vergl. § 11 Nr. 39). Es werde nun das cylindrische Volumen gesucht, dessen Basis die ringförmige Fläche zwischen der Ellipse und der daraus abgeleiteten Kurve, und dessen obere Begrenzungsfläche das Hyperboloid ist.

Nach Ausführung der ersten Integration erhält man ein Resultat von der Form

$$V = \tfrac{4}{3} c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\frac{A\cos^2\theta + B\sin^2\theta}{(A_1\cos^2\theta + B_1\sin^2\theta)^3}}\, d\theta;$$

benutzt man die Substitution

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\omega$$

und macht Gebrauch von der identischen Gleichung

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{(\alpha\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega)^3}} = \frac{1}{\alpha\beta}\int \sqrt{\alpha\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega}\cdot d\omega$$
$$+ \frac{(\alpha - \beta)\sin\omega\cos\omega}{\alpha\beta\sqrt{\alpha\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega}},$$

so gelangt man zu dem Resultate

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{abch^3 E}{(a^2 - h^2)(b^2 - h^2)},$$

worin E den Viertelumfang einer aus den Halbachsen $\sqrt{a^2 - h^2}$ und $\sqrt{b^2 - h^2}$ konstruierten Ellipse bezeichnet.

31. Ein durch die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmtes geteiltes Hyperboloid werde von einem geraden Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse parallel zur z-Achse liegt, und dessen Basis zur Gleichung hat

$$x^2 + y^2 = \frac{2a\sqrt{a^2 - b^2}}{b} y, \quad a > b;$$

man sucht das zwischen der xy-Ebene und der oberen Hälfte der Fläche enthaltene Cylindervolumen.

Dasselbe beträgt

$$V = \frac{1}{3}\pi abc \left\{ 3\left(\frac{a}{b}\right)^5 - 4\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b}\right) - 2 \right\}.$$

32. Die Kurve, deren Gleichung ist

$$(x^2 + y^2)\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \left(\frac{xy}{\cos\gamma \sin\gamma}\right)^2, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}\pi,$$

bildet zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen ein geschlossenes Blatt; nimmt man dasselbe zur Basis und das vorige Hyperboloid zur oberen Begrenzungsfläche eines cylindrischen Volumens, so erhält man in Polarkoordinaten

$$V = \frac{2a^2b^2c}{3(a^2 - b^2)^3 \sin^3 2\gamma} \left\{ a^4 - b^4 + 2a^2b^2 l\left(\frac{a^2 \sin^2\gamma + b^2 \cos^2\gamma}{a^2 \cos^2\gamma + b^2 \sin^2\gamma}\right) \right\}$$
$$- \frac{1}{3} abc \cdot \arctan\left(\frac{ab \cot 2\gamma}{a^2 + b^2}\right).$$

33. Von einem dreiachsigen Ellipsoid mögen $OA = a$ und $OB = b$ die Achsen der Horizontalspur sein; man verlangt das Volumen von demjenigen Teile des Ellipsoids, welcher das Dreieck AOB zur Basis hat.

Setzt man erst $x = a\xi^2$, $y = b\eta^2$ und führt dann Polarkoordinaten ein, so erhält man

$$V = \tfrac{2}{3}\,abc \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1-\sqrt{(1-s)^3}}{s} \sin\theta \cos\theta \, d\theta;$$

dabei ist $s = \cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$. Durch Substitution von $2\theta = \omega$ ergiebt sich schliesslich

$$V = \frac{(5\sqrt{2}-4)\pi}{24}\,abc.$$

34. Es sei wieder das vorige Ellipsoid gegeben und in der xy-Ebene eine Astroide konstruiert, deren Gleichung ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

man sucht das Volumen des Ellipsoidteiles, welcher die Fläche zwischen der genannten Kurve und der Ellipse AB zur Basis hat.

Für $x = a\xi^3$, $y = b\eta^3$ und durch nachherigen Übergang zu Polarkoordinaten ergiebt sich

$$V = abc \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{(1-s)^3}}{s} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta,$$

$$s = \cos^6\theta + \sin^6\theta = \tfrac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\theta),$$

woraus mittels der Substitution $\cos 2\theta = u$ folgt

$$V = \frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{36}\,abc.$$

35. Ein elliptischer Kegel sei bestimmt durch die Gleichung

$$z^2 = A^2x^2 + B^2y^2;$$

ferner sei ein elliptischer Cylinder konstruiert, dessen Achse parallel zur Kegelachse liegt, dessen Mantel die Kegelachse in sich enthält und dessen Horizontalquerschnitt eine dem Horizontalschnitte des Kegels ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ist, man sucht das Cylindervolumen zwischen der xy-Ebene und der Kegelfläche.

Bezeichnen a und b die Koordinaten der Horizontalspur der Cylinderachse, so ist

$$V = \int\!\!\int \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2}\,.\,dx\,dy,$$

wobei der Integrationsbereich durch die Bedingung

$$A^2(x-a)^2 + B^2(y-b)^2 \leqq A^2a^2 + B^2b^2$$

bestimmt ist. Um zu vereinfachen, setze man erst

$$Ax = x_1, \quad By = y_1, \quad Aa = a_1, \quad Bb = b_1;$$

es wird dann

$$V = \frac{1}{AB} V_1$$

und zwar bedeutet V_1 das Volumen eines Kreiscylinders, dessen Basis durch die Gleichung

$$(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$$

gegeben, und dessen obere Begrenzungsfläche ein Kreiskegel ist. Für $a_1 = h \cos \gamma$, $b_1 = h \sin \gamma$ und mit Hilfe von Polarkoordinaten findet man

$$V_1 = \frac{8h^3}{3}\int\limits_{\gamma-\frac{1}{2}\pi}^{\gamma+\frac{1}{2}\pi} \cos^3(\theta-\gamma)\, d\theta,$$

und schliesslich

$$V = \tfrac{32}{9} \cdot \frac{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2)^3}}{AB}.$$

36. Man verlangt den Inhalt des Körpers, der von den positiven Teilen der Koordinatenebenen und ausserdem von der Fläche

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$$

begrenzt wird.

Die in der Formel

$$V = c\iint \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2 dx\, dy$$

angedeuteten Integrationen beziehen sich hier auf alle positiven x und y, welche der Bedingung

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqq 1$$

genügen. Für $x = a\xi^4$, $y = b\eta^4$ wird

$$V = 16abc\iint (1 - \xi^2 - \eta^2)^2 \xi^3 \eta^3\, d\xi\, d\eta, \quad \xi^2 + \eta^2 \leqq 1,$$

und nun ist der Integrationsbereich ein Kreisquadrant; mit Hilfe von Polarkoordinaten ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{90} abc.$$

37. Man sucht das von den positiven Teilen der Koordinatenebenen und von der Fläche

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$$

begrenzte Volumen.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren erhält man

$$V=\frac{1}{1680}abc.$$

38. Das von den positiven Teilen der Koordinatenebenen und von der Fläche

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}+\sqrt[4]{\frac{z}{c}}=1$$

begrenzte Volumen ist

$$V=\frac{1}{34650}abc.$$

39. Das zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen und der Fläche

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{z}{c}\right)^2}=1$$

enthaltene Volumen beträgt

$$V=\frac{1}{70}\pi abc.$$

40. Das Volumen, welches von den positiven Teilen der Koordinatenebenen und von der Fläche

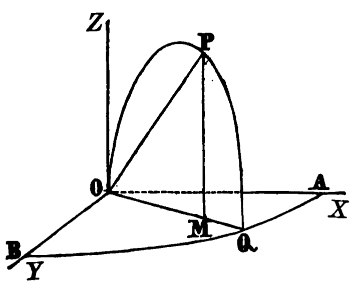
$$\sqrt[5]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[5]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}+\sqrt[5]{\left(\frac{z}{c}\right)^2}=1$$

eingeschlossen wird, beträgt

$$V=\frac{5}{6006}\pi abc.$$

41. In der Horizontalebene xy (Fig. 62) ist aus den Halbachsen $OA=a$, $OB=b$ eine Ellipse AB konstruiert, ein beliebiger Punkt Q derselben geradlinig mit O verbunden und in der Ebene QOZ über OQ als Durchmesser ein Kreis beschrieben; alle derartigen Kreise zusammen bilden eine wulstförmige Fläche, und diese umschliesst ein Volumen, dessen Grösse bestimmt werden soll.

Fig. 62.



Unter Benutzung rechtwinkliger Koordinaten hat man für das Gesamtvolumen die Formel

$$V = \int\int \sqrt{(x^2 + y^2)\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}} - 1\right)} \cdot dx\,dy, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \overline{\gtrless} 1,$$

deren vollständige Entwicklung nicht leicht sein würde. Setzt man dagegen $x = a\xi$, $y = b\eta$ und führt nachher Polarkoordinaten ein, so findet man

$$V = \tfrac{1}{8}\pi a b U,$$

worin U den Umfang der Horizontalellipse bezeichnet.

42. Die Punkte A, B, Q mögen die vorige Bedeutung behalten, an die Stelle des Kreises über dem Durchmesser OQ trete dagegen eine Vertikalellipse, die O zum Mittelpunkte, OQ zur grossen Halbachse und ausserdem eine konstante lineare Exzentrizität k hat. Alle diese konfokalen Ellipsen bilden eine geschlossene Fläche, deren kubischer Inhalt gesucht wird.

Unter der Voraussetzung $a > b > k$ ergiebt sich auf ähnliche Weise wie vorhin

$$V = \tfrac{2}{3}\, a b U_1,$$

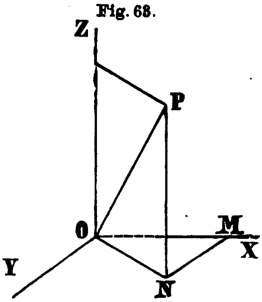
wobei U_1 den Umfang einer aus den Halbachsen $\sqrt{a^2 - k^2}$ und $\sqrt{b^2 - k^2}$ konstruierten Ellipse bedeutet.

§ 29.

Kubaturen durch Doppelintegrale in Kugelkoordinaten.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien (Fig. 63) $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ die Koordinaten des Punktes; wird nun die xy-Ebene zur Äquatorialebene, und die z-Achse zur Polarachse eines Systems räumlicher Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) genommen, worin $OP = r$, $\angle PON = \psi$, $\angle NOM = \omega$ ist, so vermitteln die Formeln

Fig. 63.



$$x = r\cos\psi\cos\omega, \quad y = r\cos\psi\sin\omega,$$
$$z = r\sin\psi$$

den Übergang von dem ersten zum zweiten Systeme. In letzterem ist das Volumenelement eine Pyramide, die r zur Höhe und das Rechteck aus den Seiten $r\cos\psi\, d\omega$ und $r\,d\psi$ zur Basis hat; daher folgt

$$V = \tfrac{1}{3}\int\int r^3 \cos\psi\, d\omega\, d\psi.$$

Für r ist sein Wert aus der Polargleichung der Begrenzungsfläche zu substituieren, die Integrationsgrenzen für ψ und ω bestimmen sich durch die Begrenzung des betrachteten Volumens.

Beispiele. 1. Ein aus den Halbachsen a, b, c konstruiertes Ellipsoid werde von einer Ebene geschnitten, welche die Halbachse c in sich enthält und mit der Ebene der Achsen a und c den Winkel γ einschliesst; man sucht das Volumen des entstandenen Ellipsoidsegmentes.

In dem Doppelintegrale

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\psi\, d\omega\, d\psi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\psi\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\cos^2\psi\sin^2\omega}{b^2} + \frac{\sin^2\psi}{c^2}\right)^3}}$$

kann man zuerst die auf ψ bezügliche Integration mittels der Substitution $\sin\psi = t$ ausführen; es bleibt dann

$$V = \frac{1}{3}a^2b^2c\int_0^{\gamma}\frac{d\omega}{b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega} = \frac{1}{3}abc\,.\,\arctan\left(\frac{a}{b}\tan\gamma\right)$$

übereinstimmend mit Nr. 22 in § 28.

2. Das zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebene und der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

enthaltene Volumen beträgt

$$V = \frac{1}{210}\pi\{5(a^3 + b^3 + c^3) + 3(b + c)(c + a)(a + b) - 4abc\}.$$

3. Das zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen und der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^5 = (a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2)^2$$

enthaltene Volumen beträgt

$$V = \frac{1}{18}\pi(a^3 + b^3 + c^3).$$

4. Der zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen liegende Oktant der Fläche

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^5 = \left(\frac{z}{h}\right)^4$$

begrenzt mit jenen Ebenen das Volumen

$$V = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{abc^3}{h^2}.$$

5. Die positiven Teile der Koordinatenebenen und die Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=h^2$$

begrenzen zusammen das Volumen

$$V=\frac{1}{8}h\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\psi\, d\omega\, d\psi}{\frac{\cos^2\psi\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\cos^2\psi\sin^2\omega}{b^2}+\frac{\sin^2\psi}{c^2}};$$

führt man zuerst die auf ω bezügliche Integration aus und setzt nachher $\sin\psi=t$, sowie zur Abkürzung

$$\alpha=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c},\quad \beta=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c},\quad (a<b<c),$$

so erhält man

$$V=\frac{1}{6}\pi abh\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-\alpha^2t^2)(1-\beta^2t^2)}}.$$

Das noch übrige Integral ist ein elliptisches Integral erster Art und kann durch die Substitution $\alpha t=\sin\varphi$ auf die Normalform

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},\quad \varkappa^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}<1$$

gebracht werden.

6. Man sucht das Volumen, welches von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=h^4$$

und von den positiven Teilen der Koordinatenebenen begrenzt wird.

Setzt man $\sin\psi=t$, so erhält man zunächst

$$V=\frac{1}{3}h^2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^1\frac{d\omega\, dt}{\sqrt{\lambda+\mu t^2}},$$

$$\lambda=\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2},\quad \mu=\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\omega}{a^2}-\frac{\sin^2\omega}{b^2}.$$

Um die irrationale Form zu vermeiden, substituiere man

$$\frac{\sqrt{\lambda+\mu}\,.\,t}{\sqrt{\lambda+\mu t^2}}=u,$$

und kehre nachher die Reihenfolge der Integrationen um; wird hierbei zur Abkürzung

$$\alpha=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\quad \beta=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b},\quad (a>b>c)$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$V=\tfrac{1}{6}\pi c h^2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}.$$

Lässt man a_1, b_1, c_1, h_1 an die Stelle von a, b, c, h treten und nennt V_1 das neue Volumen, so ist dieses gleich dem in Nr. 5 betrachteten Volumen, wenn

$$a_1=\frac{g^2}{a},\quad b_1=\frac{g^2}{b},\quad c_1=\frac{g^2}{c},\quad h_1=\sqrt{gh}$$

und g gleich dem geometrischen Mittel aus a, b, c genommen wird.

7. In der Äquatorialebene xy sei aus den Halbachsen $OA=a$ und $OB=b$ eine Ellipse konstruiert, und es bezeichne Q den Punkt, in dem die Gerade OM (s. Fig. 62 auf S. 276) den Ellipsenquadranten AB schneidet; wird nun über OQ als Durchmesser ein Kreis konstruiert, so bildet die stetige Folge aller solchen Kreise eine Fläche, deren Polargleichung ist

$$r=\frac{ab\cos\psi}{\sqrt{b^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega}}.$$

Um das von dieser Fläche und von den positiven Teilen der Koordinatenebenen begrenzte Volumen zu finden, integriere man erst nach ψ und benutze nachher die im vorigen Paragraphen Nr. 30 angegebene Reduktionsformel; man erhält

$$V=\tfrac{1}{16}\pi abE,$$

wo E den Viertelumfang der gegebenen Ellipse bezeichnet.

8. Setzt man in der vorhergehenden Aufgabe statt der Ellipse eine mit dem Radius a beschriebene Kardioide, so ist der gesamte Inhalt des entstehenden Körpers

$$V=5\pi^2a^3.$$

§ 30.
Komplanationen durch Doppelintegrale in rechtwinkligen Koordinaten.

Wenn die Gleichung einer Fläche in rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist, so schliessen die xy-Ebene und die Berührungsebene im Punkte xyz mit einander einen Winkel N ein, für den

$$\sec N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

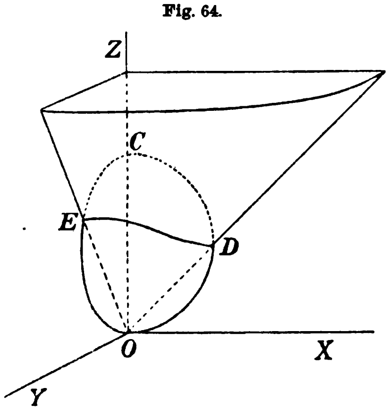
ist. Das Flächenelement dS, dessen Horizontalprojektion das Rechteck aus den Seiten dx und dy ist, hat demnach den Inhalt $\sec N . dx\, dy$ und hieraus folgt

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot dx\, dy.$$

Der Integrationsbereich für x und y ist hier die Horizontalprojektion des endlichen Flächenstückes S, dessen Inhalt gesucht wird.

Beispiele. 1. Eine mit dem Halbmesser c beschriebene Kugel, welche die xy-Ebene im Koordinatenanfange berührt, werde von einem elliptischen Kegel geschnitten, dessen Achse die z-Achse und dessen Spitze der Koordinatenanfang ist; man sucht den Flächeninhalt der innerhalb des Kegels liegenden Kugelkappe (Fig. 64).

Fig. 64.



Die Gleichungen der beiden Flächen sind

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz,$$
$$Ax^2 + By^2 = z^2,$$

und hieraus folgt

$$S = c \int\int \frac{dx\, dy}{\sqrt{c^2 - (x^2 + y^2)}},$$

wobei die Peripherie des Integrationsbereichs durch die Gleichung

$$(1 + A)x^2 + (1 + B)y^2 = 2c\sqrt{Ax^2 + By^2}$$

bestimmt ist. Die Einführung ebener Polarkoordinaten giebt

$$S = 4c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{R} \frac{r\,d\theta\,dr}{\sqrt{c^2 - r^2}}, \quad R = \frac{2c\sqrt{A\cos^2\theta + B\sin^2\theta}}{1 + A\cos^2\theta + B\sin^2\theta},$$

und nach Ausführung der auf r bezüglichen Integration

$$S = 8c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{1 + A\cos^2\theta + B\sin^2\theta} = \frac{4\pi c^2}{\sqrt{(1+A)(1+B)}}.$$

Hierin liegt der bemerkenswerte Satz, dass der Flächeninhalt der abgeschnittenen Kugelkappe gleich der Fläche einer Ellipse ist, welche die Sehnen CD und CE zu Halbachsen hat.

2. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle des Kegels ein elliptisches Paraboloid treten, dessen Gleichung

$$z = Ax^2 + By^2$$

sein möge, so erhält man als Flächeninhalt der innerhalb des Paraboloids liegenden Kugelkappe

$$S = \frac{2\pi c}{\sqrt{AB}}.$$

Dieses Resultat gestattet wörtlich dieselbe Interpretation wie das vorige, wenn mit D und E die Durchschnitte der Vertikalspuren der Kugel und des Paraboloids bezeichnet werden.

3. Aus den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c > a > b$ ist ein Ellipsoid konstruiert und auf der Strecke OC ein Abschnitt $OD = h < c$ willkürlich, jedoch so gewählt, dass eine aus dem Mittelpunkte D mit dem Radius $DC = c - h$ beschriebene Kugel nicht nur das Ellipsoid in C berührt, sondern es ausserdem längs einer doppelt gekrümmten Kurve schneidet; man verlangt den Flächeninhalt der Kugelkappe, die innerhalb des Ellipsoids liegt.

Durch eine ähnliche Rechnung wie bei den vorigen Aufgaben findet man

$$S = \frac{4\pi abh(c-h)}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}.$$

Bezeichnen E, F, G die Punkte, in welchen die Kugel der Reihe nach die Ellipse CA, die Ellipse CB und die nötigenfalls verlängerte Halbachse CO schneidet, so ist S gleich der Fläche einer Ellipse, deren Halbachsen die Sehnen EG und FG sind.

4. Aus den Halbachsen a, b, $c = OC$ ist ein geteiltes Hyperboloid konstruiert, auf der Verlängerung von OC der Punkt D in der Entfernung $OD = h > c$ willkürlich, jedoch so gewählt, dass eine aus D mit dem Radius $DC = h - c$ beschriebene Kugel das Hyperboloid in C berührt und ausserdem längs einer Kurve schneidet, wobei E, F, G die Durchschnitte der Kugel mit den Vertikalspuren des Hyperboloids und mit der verlängerten OD sein mögen; man sucht den Flächeninhalt der innerhalb des Hyperboloids liegenden Kugelkappe.

Dem Vorigen analog ergiebt sich

$$S = \frac{4\pi abh(h-c)}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}} = \pi \, . \, EG \, . \, FG.$$

5. Ein elliptisches Paraboloid sei durch die Gleichung

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)$$

bestimmt und in der Horizontalebene xy eine Ellipse konstruiert, deren Halbachsen a_1 und b_1 sich wie a zu b verhalten; man sucht den Flächeninhalt desjenigen Paraboloidstückes, welches einen Sektor der Ellipse zur Horizontalprojektion hat.

Setzt man

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$$

und bezeichnet mit γ_0 und γ_1 die Winkel zwischen der x-Achse und den Radienvektoren, die den Ellipsensektor begrenzen, so erhält man mittels ebener Polarkoordinaten

$$S = \frac{1}{3}ab\left[\sqrt{(1+\lambda^2)^3} - 1\right]\left[\arctan\left(\frac{a}{b}\tan\gamma_1\right) - \arctan\left(\frac{a}{b}\tan\gamma_0\right)\right].$$

Hieraus ergiebt sich noch der Satz, dass das Verhältnis von S zu seiner Horizontalprojektion unabhängig von den Winkeln γ_0 und γ_1 ist, dass also über gleichen Ellipsensektoren gleiche Paraboloidflächen stehen.

6. Es sei wieder das vorige Paraboloid gegeben und in der Horizontalebene das rechtwinklige Dreieck aus den Katheten $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ konstruiert; man sucht die über diesem Dreiecke stehende Paraboloidfläche.

In ebenen Polarkoordinaten erhält man zunächst

$$S = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{(1+qR^2)^3}-1}{q}\,d\theta,$$

wo q und R folgende Bedeutungen haben:

$$q = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}, \quad R = \frac{\lambda}{\frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin\theta}{b}}.$$

Durch Benutzung der Substitution

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\omega$$

vereinfacht sich der obige Ausdruck, und wird

$$S = \frac{1}{3}ab\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{[1+\tfrac{1}{2}\lambda^2 \sec^2(\omega - \tfrac{1}{4}\pi)]^3}\,d\omega - \tfrac{1}{2}\pi\right\}.$$

Das noch übrige Integral geht durch Substitution von

$$\frac{\sin(\omega - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{\frac{1}{2}\lambda^2 + \cos^2(\omega - \frac{1}{4}\pi)}} = t$$

in ein algebraisches über; man erhält nämlich

$$S = \frac{1}{3}ab\left\{(2+\lambda^2)^2\int_{-\mu}^{\mu}\frac{dt}{(1+t^2)(2-\lambda^2t^2)^2} - \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}};$$

die völlige Entwicklung hat keine Schwierigkeit.

7. Das vorige Paraboloid werde von einem Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse parallel zur z-Achse liegt, und dessen Basis mit dem Radius $\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ so konstruiert ist, dass sie die x-Achse im Koordinatenanfange berührt; man sucht die Oberfläche der Kappe, die der Cylinder aus dem Paraboloid herausschneidet.

Mit Hilfe ebener Polarkoordinaten findet man

$$S = \pi ab\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} - \frac{2}{3}\right\}.$$

8. Es sei wieder das vorige Paraboloid gegeben und in der xy-Ebene aus den Halbachsen a_1 und b_1 eine Ellipse konstruiert, welche die y-Achse im Koordinatenanfange berührt; dabei soll, wenn $\varkappa$ eine beliebige positive Zahl bezeichnet,

$$a_1 = a\varkappa\sqrt{1+\varkappa^2}, \quad b_1 = b\varkappa$$

genommen und die Oberfläche des Paraboloidstücks bestimmt werden, das jene Ellipse zur Horizontalprojektion hat.

Setzt man erst $x = ax_1$, $y = by_1$ und führt dann ebene Polarkoordinaten ein, so erhält man

$$S = \tfrac{2}{3}ab\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1+2\varkappa^2-\varkappa^2\sin^2\theta}{1+\varkappa^2\sin^2\theta}\right)^3 d\theta - \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi ab\{(2+2\varkappa^2+3\varkappa^4)\sqrt{1+\varkappa^2}-2\}.$$

9. Man sucht die Grösse desjenigen Teiles von dem vorigen Paraboloid, dessen Horizontalprojektion durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{4c^2(c^2+a^2)}{a^2}x^2 + \frac{4c^2(c^2+b^2)}{b^2}y^2$$

bestimmt, also die Fusspunktkurve einer Ellipse ist.

Mit Hilfe von Polarkoordinaten findet sich

$$S = \frac{2\pi}{3}\left\{\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{a^4b^4}c^6 + \frac{6(a^2+b^2)}{a^2b^2}c^4 + 6c^2\right\}.$$

10. Das vorige Paraboloid werde von einer mit dem Radius

$$c = a + b + \sqrt{ab}$$

beschriebenen Kugelfläche geschnitten, welche die xy-Ebene im Koordinatenanfange berührt; man sucht die Grösse der innerhalb der Kugel liegenden Paraboloidfläche.

Setzt man erst $x = ax_1$, $y = by_1$ und nachher $x_1 = r\cos\theta$, $y_1 = r\sin\theta$, so erhält man

$$S = 4ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^R \sqrt{1+r^2}\cdot r\,d\theta\,dr,$$

$$R^2 = 4\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{ab}+a\cos^2\theta+b\sin^2\theta}{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^2},$$

und durch Ausführung der ersten Integration

$$S = \tfrac{4}{3}ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left\{\left(1+\frac{2\sqrt{ab}}{a\cos^2\theta+b\sin^2\theta}\right)^3 - 1\right\}d\theta,$$

oder

$$S = \tfrac{2}{3}\pi\{3(a^2+b^2)+8ab+6(a+b)\sqrt{ab}\}.$$

11. Es sei eine Fläche durch die Gleichung

$$z = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{x^3}{a}} + \sqrt{\frac{y^3}{b}}\right),$$

und in der xy-Ebene eine Gerade durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda$$

bestimmt, worin λ eine beliebige positive Zahl bezeichnet; man verlangt die Komplanation desjenigen Flächenstücks, welches das von den positiven Koordinatenachsen der x, y und von der Geraden gebildete Dreieck zur Horizontalprojektion hat.

Durch unmittelbare Ausführung der nötigen Integrationen findet sich

$$S = \tfrac{2}{15}ab\{2 - 5\sqrt{(1+\lambda)^3} + 3\sqrt{(1+\lambda)^5}\},$$

oder für $\lambda = cot^2\gamma$

$$S = \tfrac{2}{15}ab\{2 - 5\,csc^3\gamma + 3\,csc^5\gamma\}.$$

Der Winkel γ hat eine leicht erkennbare Bedeutung. Alle Punkte der Fläche, deren Normalen mit der xy-Ebene den gleichen Neigungswinkel γ einschliessen, liegen nämlich auf einer Kurve, deren Horizontalprojektion durch die Gleichung

$$cot^2\gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

gegeben ist; letztere stimmt mit der Gleichung der anfangs erwähnten Geraden überein, und daher ist die Fläche S begrenzt von ihren Vertikalspuren und derjenigen Kurve isokliner Normalen (Tl. I, § 24), die dem Neigungswinkel γ entspricht.

Man kann dieses Resultat direkt und zwar dadurch erhalten, dass man statt der Koordinaten x und y die Winkel einführt, welche die Richtung einer beliebigen, durch den Punkt xyz gehenden Normale der Fläche bestimmen. Bezeichnet ν den Neigungswinkel der Normale gegen die xy-Ebene, χ den Winkel zwischen der Horizontalprojektion der Normale und der x-Achse, so gelten folgende Gleichungen:

$$S = \int\!\!\int \frac{dx\,dy}{sin\,\nu},$$

$$\tan\chi = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \sqrt{\frac{ay}{bx}}, \quad \cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b};$$

aus der zweiten erhält man

$$y = \frac{b}{a} x \tan^2\chi,$$

und durch Substitution hiervon in die Komplanationsformel, wobei man sich χ als die neue, für y eintretende Variable zu denken hat,

$$S = \frac{2b}{a}\int\int \frac{x \sin\chi}{\sin\nu \cos^3\chi}\, dx\, d\chi.$$

Aus der Gleichung für $\cot^2\nu$ ergiebt sich ferner zufolge des Wertes von y

$$\cot^2\nu = \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\tan^2\chi \quad \text{oder} \quad x = a\cos^2\chi\cot^2\nu,$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks, wobei ν die neue Variable bedeutet,

$$S = -4ab\int\int \frac{\cos^3\nu}{\sin^6\nu} \cos\chi \sin\chi\, d\nu\, d\chi.$$

Um nun das erwähnte Flächenstück zu begrenzen, muss χ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, und ν von $\frac{1}{2}\pi$ bis γ ausgedehnt werden; dies giebt

$$S = 4ab\int_\gamma^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3\nu}{\sin^6\nu}\, d\nu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\chi\sin\chi\, d\chi$$

$$= 2ab\int_\gamma^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{\sin^6\nu} - \frac{1}{\sin^4\nu}\right)\cos\nu\, d\nu,$$

was mit dem früheren Resultate übereinkommt.

12. Durch die Gleichung

$$z = \tfrac{2}{3}(Ax^2 + By^2)^{\frac{3}{4}}$$

ist eine Fläche bestimmt, deren Vertikalspuren semikubische Parabeln und deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; man verlangt die Grösse der Kappe, die von der dem Neigungswinkel γ entsprechenden Kurve isokliner Normalen begrenzt wird.

Zur Einführung von χ und ν dienen hier die Gleichungen

$$\tan\chi = \frac{By}{Ax} \quad \text{oder} \quad y = \frac{A}{B}\, x \tan\chi,$$

$$\cot^2\nu = \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{\sqrt{Ax^2 + By^2}} \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{A\sin^2\chi + B\cos^2\chi}{A^3 B} \cos^2\chi \cot^4\nu,$$

mithin ist

$$S = \frac{2}{A^2B^2} \int\limits_{\gamma}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3\nu}{\sin^6\nu}\, d\nu \int\limits_0^{2\pi} (A\sin^2\chi + B\cos^2\chi)\, d\chi$$

$$= \frac{2\pi(A+B)}{15A^2B^2} (2 - 5\csc^3\gamma + 3\csc^5\gamma).$$

13. Ein Paraboloid dritten Grades sei durch die Gleichung

$$z = \tfrac{1}{3}\left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2}\right)$$

bestimmt, und es werde die Komplanation der Kappe verlangt, deren Begrenzung die zum Neigungswinkel γ gehörende Kurve isokliner Normalen ist.

Man erhält nach der vorigen Methode

$$S = ab \int\limits_{\gamma}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\nu}{\sin^3\nu} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{\sin\chi\cos\chi}};$$

das auf χ bezügliche Integral hat den Wert 3,70815, daher ist

$$S = 1{,}854075 \,.\, ab \left(\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma} + l\cot\tfrac{1}{2}\gamma\right).$$

14. Durch die Gleichung

$$z = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}$$

ist eine Fläche charakterisiert, deren Vertikalspuren gleichseitige Hyperbeln, und deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; eine Zone der Fläche sei von denjenigen zwei Kurven isokliner Normalen begrenzt, die den Neigungswinkeln γ_0 und γ_1 entsprechen; man sucht den Flächeninhalt dieser Zone.

Zunächst ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{2} a^4b^4 \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{d\nu}{\sin\nu\cos^2\nu} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{(b^4\cos^2\chi + a^4\sin^2\chi)^3}},$$

und wenn man hier die Reduktionsformel

$$\int \frac{d\chi}{\sqrt{(\alpha\cos^2\chi+\beta\sin^2\chi)^3}}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\left\{\int\sqrt{\alpha\cos^2\chi+\beta\sin^2\chi}\,.\,d\chi-\frac{(\alpha-\beta)\cos\chi\sin\chi}{\sqrt{\alpha\cos^2\chi+\beta\sin^2\chi}}\right\}$$

anwendet, so gelangt man zu dem Resultate

$$S=\frac{\sqrt{ab}}{2}\left\{sec\gamma_1-sec\gamma_0+l\left(\frac{tan\frac{1}{2}\gamma_1}{tan\frac{1}{2}\gamma_0}\right)\right\}P,$$

worin P den Umfang einer aus den Halbachsen

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{b^3}{a}}$$

konstruierten Ellipse bedeutet.

15. In der Horizontalebene xy sei aus dem Koordinatenanfange mit dem Radius c ein Kreis beschrieben und in diesem ein beliebiger Radius OQ gezogen, der mit der x-Achse den Winkel ω einschliesst; auf der z-Achse werde nun der Abschnitt $ON=c\sin\omega$ genommen und durch N eine Parallele zu OQ gelegt; alle diese, der stetigen Änderung des ω entsprechenden Geraden bilden zusammen eine windschiefe Fläche. Von letzterer soll dasjenige Flächenstück bestimmt werden, dessen Horizontalprojektion ein die y-Achse im Koordinatenanfange berührender, über dem Durchmesser b beschriebener Kreis ist.

Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{b^2+c^2}=a$, so erhält man durch Einführung von $x=r\cos\theta$ und $y=r\sin\theta$

$$S=\tfrac{1}{4}\pi\left\{ab+c^2l\left(\frac{a+b}{c}\right)\right\}.$$

Zu demselben Resultate führt auch die Bemerkung, dass der über b als Durchmesser beschriebene Kreis die Horizontalprojektion von derjenigen Kurve isokliner Normalen ist, welche dem Winkel $\gamma=arctan\dfrac{b}{c}$ entspricht.

16. Aus den Halbachsen $OA=a$, $OB=b$ sei in der Horizontalebene xy eine Ellipse konstruiert, nach einem beliebigen Punkte Q derselben der Radiusvektor OQ gezogen, ferner auf der z-Achse die Strecke $ON=OQ$ abgeschnitten und durch N eine Parallele

zu OQ gelegt; die letzteren Geraden bilden zusammen eine Regelfläche. Von dieser soll dasjenige Stück quadriert werden, welches von zwei den Neigungswinkeln α und β entsprechenden Kurven isokliner Normalen begrenzt wird.

Der Flächeninhalt der bezeichneten Zone ist

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{ab} \int_\alpha^\beta \frac{dv}{\cos^3 v}.$$

17. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Ellipse durch ihre Fusspunktkurve, deren Gleichung ist

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$

so erhält man

$$S = \pi (a - b)^2 \int_\alpha^\beta \frac{dv}{\cos^5 v}.$$

18. Ein elliptischer Kegel sei durch die Gleichung bestimmt

$$z^2 = Ax^2 + By^2, \quad A < B,$$

und in der Horizontalebene eine Lemniskate durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2 xy;$$

man sucht die Grösse desjenigen Stückes der Kegelfläche, das über der Horizontalebene liegt, und von dem das zwischen den positiven Teilen der x- und y-Achse enthaltene Lemniskatenblatt die Horizontalprojektion darstellt.

Setzt man zur Abkürzung

$$A(1 + A) = A_1, \quad B(1 + B) = B_1,$$

so erhält man in ebenen Polarkoordinaten

$$S = c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\frac{A_1 \cos^2\theta + B_1 \sin^2\theta}{A \cos^2\theta + B \sin^2\theta}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta;$$

die noch übrige Integration kann mittels der Substitution

$$\frac{A_1 \cos^2\theta + B_1 \sin^2\theta}{A \cos^2\theta + B \sin^2\theta} = (1 + A + B) \sin^2\omega$$

ausgeführt werden, und zwar ergiebt sich, wenn die Hilfswinkel α und β durch die Formeln

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1+A}{B}},\quad \tan\beta = \sqrt{\frac{1+B}{A}}$$

bestimmt werden

$$S = \frac{ABc^2}{2(B-A)\sqrt{1+A+B}}\left\{\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - l\left(\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta)}{\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)}\right)\right\}.$$

19. Der vorige elliptische Kegel werde von der Fläche

$$z^4 = c^2 x y$$

geschnitten; man sucht dasjenige Stück der Kegelfläche, das zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen von der Schnittkurve begrenzt wird.

Setzt man $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ und nach Ausführung der auf r bezüglichen Integration

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{Au}{B(1-u)}},$$

so erhält man

$$S = \frac{c^2}{6}\cdot\frac{A+B+\sqrt{(1+A)(1+B)}+2}{AB(\sqrt{1+A}+\sqrt{1+B})}.$$

20. Der vorige elliptische Kegel werde von der Rotationsfläche

$$(x^2+y^2)^3 = c^4 z^2$$

geschnitten; man sucht das innerhalb dieser Fläche liegende Stück der Kegelfläche.

In Polarkoordinaten ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{2} c P,$$

wobei P den Umfang einer aus den Halbachsen

$$c\sqrt{A(1+A)} \quad \text{und} \quad c\sqrt{B(1+B)}$$

konstruierten Ellipse bedeutet.

21. Parallel zur xy-Ebene sei in der Entfernung c eine Ebene gelegt und in letzterer eine Astroide konstruiert, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist; lässt man eine durch den Koordinatenanfang gehende bewegliche Gerade an dieser Kurve hingleiten, so entsteht eine Kegelfläche mit der Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (Cz)^{\frac{2}{3}},\quad C = \frac{a}{c};$$

man sucht den Flächeninhalt desjenigen Kegelstücks, das zwischen dem Koordinatenanfang und einem in der Höhe h genommenen Horizontalquerschnitt enthalten ist.

Zunächst erhält man

$$S = \frac{1}{C} \int\int \sqrt{\left[C^2 + \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2 (xy)^{-\frac{2}{3}}\right]} \,.\, dx\, dy,$$

wobei sich die Integrationen auf alle positiven und negativen x und y beziehen, die der Bedingung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq (Ch)^{\frac{2}{3}}$$

genügen. Substituiert man nach einander $x = \xi^3$, $y = \eta^3$, so wird

$$S = \frac{9}{C} \int \sqrt{C^2 \xi^2 \eta^2 + (\xi^2 + \eta^2)^2} \,.\, \xi \eta\, d\xi\, d\eta,$$

und der Integrationsbereich ist nun ein mit dem Radius $\sqrt[3]{Ch}$ um den Koordinatenanfang beschriebener Kreis; durch Einführung von Polarkoordinaten und Anwendung der Substitution $\cos 2\theta = u$ findet man

$$S = \tfrac{3}{4} h^2 \left\{2C + (4 + C^2) \arctan \frac{C}{2}\right\}.$$

22. Die vorige Fläche werde von einem vertikalen Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse die z-Achse und dessen Radius $= k$ ist; man verlangt die Komplanation des innerhalb des Cylinders liegenden oberen Flächenteiles.

Mittels der vorigen Substitutionen erhält man

$$S = 2k^2 \left\{\frac{2\sqrt{C^2 + 3}}{C} \arctan(\sqrt{C^2 + 3}) - \arctan \frac{C}{2}\right\}.$$

23. Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

sein möge, denke man sich zwei Kurven isokliner Normalen konstruiert, welche den Neigungswinkeln ν_0 und ν_1 entsprechen; es soll der Inhalt der von jenen Kurven begrenzten Zone ermittelt werden.

Benutzt man die Gleichungen

$$\tan \chi = \frac{By}{Ax}, \quad \cot^2 \nu = \frac{A^2 x^2 + B^2 y^2}{C(1 - Ax^2 - By^2)},$$

so erhält man

$$S = ABC\int_{v_1}^{v_0}\int_0^{2\pi}\frac{\cos v\,dv\,d\chi}{(BC\cos^2 v\cos^2\chi + CA\cos^2 v\sin^2\chi + AB\sin^2 v)^2},$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$p = B(C\cos^2 v + A\sin^2 v), \quad q = A(C\cos^2 v + B\sin^2 v)$$

gesetzt wird;

$$S = ABC\int_{v_1}^{v_0}\cos v\,dv\int_0^{2\pi}\frac{d\chi}{(p\cos^2\chi + q\sin^2\chi)^2},$$

und nach Ausführung der auf χ bezüglichen Integration

$$S = \pi ABC\int_{v_1}^{v_0}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right\}\frac{\cos v}{\sqrt{pq}}\,dv.$$

Bei dem Ellipsoide sei $A < B < C$, bei den Hyperboloiden $A^2 > B^2$; die Grössen

$$\alpha = \sqrt{1-\frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1-\frac{B}{C}}$$

sind dann immer reell und bedeuten geometrisch die numerischen Exzentrizitäten der Vertikalspuren der Fläche; zugleich ist immer $\alpha > \beta$. Mittels der Substitutionen

$$\sin v = u, \quad \sin v_0 = u_0, \quad \sin v_1 = u_1$$

ergiebt sich nun

$$S = \frac{\pi}{C\sqrt{AB}}\int_{u_1}^{u_0}\left\{\frac{A}{1-\alpha^2u^2}+\frac{B}{1-\beta^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}.$$

Um dieses Integral durch elliptische Integrale auszudrücken, setze man weiter

$$\varkappa = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}, \quad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha}$$

und beachte folgende identische Gleichung:

$$\frac{1}{\alpha}\int\left\{\frac{A}{\cos^2\varphi}+\frac{B}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\right\}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{\frac{C}{C-A}}\left\{A\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} + (C-A)\int\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi \right.$$

$$\left. + \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\tan\varphi\right\};$$

führt man nun die Abkürzungen ein

$$E(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi,\quad F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

$$G(\varphi)=\frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\tan\varphi,$$

und bestimmt die Grenzen von φ mittels der Gleichungen

$$\sin\varphi_0=\alpha u_0=\alpha\sin\nu_0,\quad \sin\varphi_1=\alpha u_1=\alpha\sin\nu_1,$$

so erhält man schliesslich

$$S=\frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\{(C-A)[E(\varphi_0)-E(\varphi_1)]$$
$$+A[F(\varphi_0)-F(\varphi_1)]+G(\varphi_0)-G(\varphi_1)\}.$$

Bei dem Ellipsoid, dessen Halbachsen a, b, c sein mögen, führen die Werte $\nu_1=0$, $\nu_0=\frac{1}{2}\pi$ zur Oberfläche des Halbellipsoids; die Gesamtoberfläche des Ellipsoids ist demnach

$$\Omega=\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)E(\varphi_0)+c^2F(\varphi_0)+a^2c^2G(\varphi_0)\},$$

$$\sin\varphi_0=\alpha=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\quad \cos\varphi_0=\frac{c}{a},$$

oder einfacher

$$\Omega=2\pi c\{b\,E(\varphi_0)\tan\varphi_0+b\,F(\varphi_0)\cot\varphi_0+c\}.$$

24. Durch die Gleichung

$$Ax^{\frac{2}{3}}+By^{\frac{2}{3}}+Cz^{\frac{2}{3}}=1$$

wird eine Fläche bestimmt, deren Schnitte, parallel zu den Koordinatenebenen genommen, Evoluten von Ellipsen oder Hyperbeln sind; man sucht den Inhalt einer Zone, die von zwei, den Neigungswinkeln ν_0 und ν_1 entsprechenden Kurven isokliner Normalen begrenzt wird.

Benutzt man zur Einführung von χ und ν die Formeln

$$y=\frac{B^3}{A^3}x\cot^3\chi,$$

$$x^2=\frac{A^6\sin^6\chi}{(A^3\sin^2\chi+B^3\cos^2\chi+C^3\sin^2\chi\cos^2\chi\cot^2\nu)^3},$$

so erhält man

$$S=9A^3B^3C^3\int_{\nu_1}^{\nu_0}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\nu\cos\nu\,.\,\sin^4\chi\cos^4\chi\,d\nu\,d\chi}{[(A^3\sin^2\chi+B^3\cos^2\chi)\sin^2\nu+C^3\sin^2\chi\cos^2\chi\cos^2\nu]^4}.$$

Das auf χ bezügliche Integral braucht man nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gehen zu lassen, wenn man den Faktor 4 hinzusetzt; substituiert man nachher

$$\sin v = u, \quad \tan\chi = t,$$

wobei $\sin v_0 = u_0$, $\sin v_1 = u_1$ sein möge, so findet man

$$S = 36 A^3 B^3 C^3 \int_{u_1}^{u_0} u^4\, du \int_0^\infty \frac{t^4 (1+t^2)^3\, dt}{[B^3 u^3 + \{C^3 + (A^3 + B^3 - C^3) u^2\} t^2 + A^3 u^2 t^4]^4}.$$

Nach den Formeln 25) bis 28) in § 10 ist nun

$$\int_0^\infty \frac{t^4 (1+t^2)^3\, dt}{(a + b t^2 + c t^4)^4}$$

$$= \frac{5\pi}{32}\left(\sqrt[6]{\frac{c}{a^2}} + \sqrt[6]{\frac{a}{c^2}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{h^7}} + \frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}} + \frac{1}{\sqrt{c^3}}\right)\frac{1}{\sqrt{h^5}},$$

$$h = b + 2\sqrt{ac},$$

mithin im vorliegenden Falle, wo

$$a = B^3 u^2, \quad b = C^3 + (A^3 + B^3 - C^3) u^2, \quad c = A^3 u^2,$$

$$h = C^3 + [(\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3})^2 - C^3]\, u^2$$

ist, und zur Abkürzung

$$\lambda = (\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3})^2 - C^3,$$

$$M = (\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3})^3 \sqrt{A^3 B^3}, \quad N = \sqrt{A^9} + \sqrt{B^9}$$

sein möge,

$$S = \frac{9\pi C^3}{8\sqrt{A^3 B^3}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{\frac{5 M u^3}{\sqrt{(C^3 + \lambda u^2)^7}} + \frac{N u}{\sqrt{(C^3 + \lambda u^2)^5}}\right\} du.$$

Die noch übrige Integration ist sehr einfach und liefert, wenn

$$\sqrt{C^3 + \lambda u_0^2} = \sqrt{C^3 + \lambda \sin^2 v_0} = \mu_0,$$

$$\sqrt{C^3 + \lambda u_1^2} = \sqrt{C^3 + \lambda \sin^2 v_1} = \mu_1$$

gesetzt wird, folgendes Endresultat

$$S = \frac{3\pi C^3}{8\lambda^2 \sqrt{A^3 B^3}}\left\{(5M + \lambda N)\left(\frac{1}{\mu_1^3} - \frac{1}{\mu_0^3}\right) - 3 C^3 M \left(\frac{1}{\mu_1^5} - \frac{1}{\mu_0^5}\right)\right\}.$$

Bei der untersuchten Fläche ist demnach jede durch zwei Kurven isokliner Normalen begrenzte Zone algebraisch quadrierbar.

Im Falle positiver A, B, C schreibe man die Gleichung der Fläche unter der homogenen Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ihre halbe Oberfläche entspricht dann den Werten $\nu_0 = \frac{1}{2}\pi$ und $\nu_1 = 0$. Setzt man für den Augenblick

$$\frac{1}{a} = \alpha, \quad \frac{1}{b} = \beta, \quad \frac{1}{c} = \gamma, \quad \alpha + \beta = \varepsilon,$$

so ist

$$A^3 = \alpha^2, \quad B^3 = \beta^2, \quad C^3 = \gamma^2,$$

$$\lambda = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \varepsilon^2 - \gamma^2,$$

$$M = (\alpha + \beta)^3 \alpha\beta = \varepsilon^3 \alpha\beta, \quad N = \alpha^3 + \beta^3 = \varepsilon(\varepsilon^2 - 3\alpha\beta),$$

$$\mu_0 = \varepsilon, \quad \mu_1 = \gamma,$$

mithin die gesamte Oberfläche

$$\Omega = \frac{3\pi\gamma^2\varepsilon}{4\alpha\beta\lambda^2}\left\{[\varepsilon^4 + (2\alpha\beta - \gamma^2)\varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2]\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{\varepsilon^3}\right) - 3\alpha\beta\gamma^2\varepsilon^2\left(\frac{1}{\gamma^5} - \frac{1}{\varepsilon^5}\right)\right\}$$

$$= \frac{3\pi}{4\alpha\beta\gamma\varepsilon^2\lambda^2}\{[\varepsilon^4 + (2\alpha\beta - \gamma^2)\varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2](\varepsilon^3 - \gamma^3) - 3\alpha\beta(\varepsilon^5 - \gamma^5)\}$$

$$= \frac{3\pi}{4\alpha\beta\gamma\lambda^2}\{\varepsilon^5 - (\gamma^2 + \alpha\beta)\varepsilon^3 - \gamma^3\varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2\varepsilon + (\gamma^2 - 2\alpha\beta)\gamma^3\}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{(\varepsilon - \gamma)^2[\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\varepsilon + \gamma(\gamma^2 - 2\alpha\beta)]}{\alpha\beta\gamma\lambda^2},$$

oder wegen $\lambda = (\varepsilon + \gamma)(\varepsilon - \gamma)$

$$\Omega = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\varepsilon + \gamma(\gamma^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)^2},$$

woraus man schliesslich erhält

$$\Omega = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 + 2abc[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + abc]}{(bc + ca + ab)^2}.$$

Im speziellen Falle $a = b = c$ wird Ω gleich $\frac{17}{48}$ der umschriebenen Kugelfläche.

25. Man verlangt den Inhalt derjenigen Zone von der Fläche

$$z = \frac{1}{2} cl\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

die durch die beiden den Neigungswinkeln α und β entsprechenden Kurven isokliner Normalen begrenzt wird.

Nach dem bisherigen Verfahren ergiebt sich

$$S = \frac{\pi(a^2+b^2)c^2}{ab}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dv}{\cos^3 v},$$

wobei die noch übrige Integration leicht ausführbar ist.

26. Durch die Gleichung

$$z = c \arctan \frac{ay}{bx}$$

wird eine schraubenähnliche Fläche bestimmt, in der die von zwei Kurven isokliner Normalen begrenzte Zone dieselbe Grösse hat wie in Nr. 25.

27. Bei der Fläche, deren Gleichung ist

$$z = \tfrac{1}{2} a l\left(\frac{x^2+y^2}{c^2}\right) + b \arctan\frac{y}{x},$$

bilden die Horizontalprojektionen der Kurven isokliner Normalen konzentrische Kreise; sind r_0 und r_1 die Halbmesser zweier solcher Kreise, so ist die Zone zwischen den betreffenden Kurven

$$S = 2\pi\int\limits_{r_0}^{r_1}\sqrt{a^2+b^2+r^2}\cdot dr.$$

28. Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{z}{c}}+e^{-\frac{z}{c}}\right)^2$$

wird eine Fläche charakterisiert, deren Vertikalspuren Kettenlinien, und deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; die Zone zwischen den Kurven isokliner Normalen, die den Neigungswinkeln α und β entsprechen, hat dieselbe Fläche wie in Nr. 25.

§ 31.

Komplanation durch Doppelintegrale in Cylinderkoordinaten.

Setzt man in der auf rechtwinklige Koordinaten (x, y, z) bezogenen Gleichung einer Fläche

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

so erhält man eine neue Gleichung zwischen den Grössen θ, r, z, und diese ist die Gleichung der Fläche in Cylinderkoordinaten,

wobei man sich z als Funktion von θ und r denken kann. Um für diesen Fall die Komplanationsformel direkt zu entwickeln, bestimme man zunächst die Gleichung der Ebene, welche die gegebene Fläche im Punkte $\theta r z$ berührt. Ist nun in rechtwinkligen Koordinaten

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 1$$

die Gleichung der Berührungsebene, so finden sich A, B, C mittels der Bemerkung, dass diese Ebene durch die Punkte

$$\theta, r, z; \quad \theta + d\theta, r, z + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta; \quad \theta, r + dr, z + \frac{\partial z}{\partial r} dr$$

gehen muss. Dies giebt folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&A r \cos\theta + B r \sin\theta + C z = 1 \\
&A r \cos(\theta + d\theta) + B r \sin(\theta + d\theta) + C\left(z + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta\right) = 1, \\
&A(r + dr)\cos\theta + B(r + dr)\sin\theta + C\left(z + \frac{\partial z}{\partial r} dr\right) = 1,
\end{aligned}$$

und diese liefern die Werte

$$\frac{A}{C} = -\left\{\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right\},$$

$$\frac{B}{C} = -\left\{\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right\}.$$

Bezeichnet ferner N den Winkel zwischen der Berührungsebene und der xy-Ebene, so ist

$$\sec N = \sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2},$$

und damit geht die gewöhnliche Komplanationsformel

$$S = \int\int \sec N \, dx \, dy$$

in die gesuchte Formel über, nämlich

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} \cdot r \, d\theta \, dr.$$

Die Integrationsgrenzen für r und θ bestimmen sich hierbei durch die Polargleichung der Horizontalprojektion des zu quadrierenden Flächenstücks.

Beispiele. 1. Die Gleichung

$$z = \frac{a^2 x + b^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 \cos\theta + b^2 \sin\theta}{r}$$

charakterisiert eine Fläche, deren Vertikalspuren gleichseitige Hyperbeln, und deren Horizontalquerschnitte Kreise sind; man sucht den Inhalt desjenigen Flächenstücks, welches einen mit den Radien h und k beschriebenen, von $\theta = \gamma_0$ bis $\theta = \gamma_1$ gehenden Kreisringsektor zur Horizontalprojektion hat.

Setzt man $a^4 + b^4 = c^4$, so findet sich

$$S = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\int_h^k \sqrt{1 + \frac{c^4}{r^4}} \cdot r\, d\theta\, dr = (\gamma_1 - \gamma_0) \int_h^k \frac{\sqrt{c^4 + r^4}}{r}\, dr;$$

die noch übrige Integration kann mittels der Substitution $c^4 + r^4 = u^2$ leicht ausgeführt werden.

2. In der Höhe $z = 2a$ ist eine Horizontalebene gelegt, in dieser eine Archimedische Spirale konstruiert, deren Gleichung $r_1 = a\theta$ sein möge, und von jedem Punkte der Spirale eine Gerade nach dem Koordinatenanfange gezogen; es soll nun dasjenige Stück der entstandenen Kegelfläche quadriert werden, dessen Horizontalprojektion der von $\theta = 0$ bis $\theta = \theta$ reichende Sektor genannter Spirale ist.

Man findet

$$S = a^2(\theta + \tfrac{1}{6}\theta^3) = a r_1 + \tfrac{1}{6}\frac{r_1^3}{a}.$$

3. Die Gleichung der Fläche sei

$$z = \mu r + c\theta,$$

und es werde die Komplanation desjenigen Flächenstücks verlangt, das einen mit dem Radius a beschriebenen von $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$ reichenden Kreissektor zur Horizontalprojektion hat.

Zunächst ergiebt sich

$$S = \gamma \int_0^a \sqrt{c^2 + (1 + \mu^2) r^2} \cdot dr,$$

wo die noch übrige Integration leicht auszuführen ist.

4. Nimmt man als Gleichung der Fläche

$$z = 2\sqrt{2br} + b\theta,$$

und zur Horizontalprojektion wieder den vorigen Kreissektor, so erhält man

$$S = a(\tfrac{1}{2}a + b)\gamma.$$

5. Die Evolutenfläche der Schraubenlinie lässt sich in Cylinderkoordinaten durch folgende Gleichung darstellen

$$\mu z = c\left(\theta + Arccos\frac{c}{r}\right) - \sqrt{r^2 - c^2};$$

hieraus ergiebt sich

$$S = \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\int\int r\,d\theta\,dr,$$

oder, wenn $\mu = cot\,\gamma$ und das Doppelintegral $= S_1$ gesetzt wird,

$$S = S_1 \sec\gamma.$$

Die Integrationsgrenzen sind hier beliebig, es bezeichnet also S den Inhalt einer auf der Evolutenfläche willkürlich konstruierten geschlossenen Figur, S_1 den Flächeninhalt ihrer Horizontalprojektion; beide Flächen stehen in konstantem Verhältnis.

6. Die Gleichung einer Fläche sei

$$\theta = l\left(\frac{z + \sqrt{r^2 - z^2}}{c}\right) + Arcsin\frac{z}{r},$$

mithin z eine implicite Funktion von θ und r; dies giebt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{z + \sqrt{r^2 - z^2}}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z - \sqrt{r^2 - z^2}}{2},$$

mithin

$$S = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\int\int r\,d\theta\,dr.$$

Auch hier steht der Inhalt einer beliebig auf der Fläche gezeichneten Figur in konstantem Verhältnisse zum Inhalte der zugehörigen Horizontalprojektion.

7. Die Ebene, der Rotationskegel und die beiden vorigen Flächen haben die Eigenschaft gemein, dass zwischen jedem S und dem entsprechenden S_1 die Relation $S = S_1 \sec\gamma$ stattfindet, worin γ einen konstanten Winkel bezeichnet; man wird hierdurch auf die allgemeine Frage geführt, ob es noch weitere Flächen von dieser Eigenschaft giebt und wie deren Gleichungen zu finden sind. Zur Antwort dient folgende einfache Überlegung.

Eine Ebene sei durch die Gleichung

$$z = Px + Qy + R$$

charakterisiert, ψ ihr Neigungswinkel gegen die Horizontalebene xy, mithin

$$\tan^2\psi = P^2 + Q^2.$$

Diese Ebene möge sich beliebig, aber doch so bewegen, dass der Winkel ψ den konstanten Wert γ behält; es müssen dann P und Q der Bedingung

$$P^2 + Q^2 = \tan^2\gamma$$

genügen, und dies erreicht man allgemein durch die Annahme

$$P = \tan\gamma \cdot \cos\omega, \quad Q = \tan\gamma \cdot \sin\omega,$$

worin ω einen beliebigen Winkel bezeichnet. Setzt man zur Abkürzung $\cot\gamma = \mu$ und $\mu R = t$, so repräsentiert die Gleichung

$$\mu z = x\cos\omega + y\sin\omega + t$$

bei variabeln ω und t eine Schar von Ebenen, die sämtlich mit der xy-Ebene denselben Neigungswinkel γ bilden. Um nun dieser veränderlichen Ebene eine regelmässige Bewegung zu erteilen, denke man sich t als Funktion von ω, etwa $t = F(\omega)$;* zu einer so entstehenden Ebenenschar kann es möglicherweise eine ein-

* Zur Erläuterung diene folgendes. Man lasse die Ebene von konstanter Neigung sich so bewegen, dass ihre Horizontalspur eine feste Kurve berührt, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $v = f(u)$ sein möge. Für die Horizontalspur der Ebene hat man die Gleichung

$$y = -\cot\omega \cdot x - \frac{t}{\sin\omega},$$

und diese muss nun identisch sein mit der Gleichung einer Tangente an der gegebenen Kurve, d. h. identisch mit

$$y = f'(u) \cdot x + f(u) - u f'(u).$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$f'(u) = -\cot\omega, \quad t = [u f'(u) - f(u)]\sin\omega,$$

welche nach Elimination von u zu einer Gleichung von der oben erwähnten Form $t = F(\omega)$ führen. Dies ist zugleich der Weg, um die Funktion F zu bestimmen, wenn die Leitkurve (die Horizontalspur der nachherigen einhüllenden Fläche) durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt ist. Für Polarkoordinaten gestaltet sich die Sache ähnlich.

hüllende Fläche geben, deren Gleichung auf die gewöhnliche Weise gefunden wird, nämlich durch Elimination von ω aus den beiden Gleichungen:

$$\mu z = x \cos\omega + y \sin\omega + F(\omega),$$
$$0 = -x \sin\omega + y \cos\omega + F'(\omega).$$

Die Berührungsebenen an der so bestimmten Fläche sind die vorigen Ebenen und haben gegen den Horizont dieselbe Neigung, daher ist

$$S = \int\int \frac{1}{\cos\gamma} dx\, dy = S_1 \sec\gamma.$$

Beispielsweise erhält man für $F(\omega) = -c\omega$ und durch Einführung von $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\mu z = r\cos(\theta - \omega) - c\omega, \quad 0 = r\sin(\theta - \omega) - c;$$

aus der zweiten Gleichung finden sich $\sin(\theta - \omega)$, $\cos(\theta - \omega)$, ω, und durch Substitution dieser Werte in die erste Gleichung wird

$$\mu z = \sqrt{r^2 - c^2} - c\left(\theta - \operatorname{Arcsin}\frac{c}{r}\right).$$

Setzt man $-z$ für z und $\theta + \frac{1}{2}\pi$ für θ, so gelangt man zu dem in Nr. 5 betrachteten Falle.

Für $F(\omega) = ke^{\omega}$ und bei zweckmässiger Wahl von k und μ ergiebt sich das Beispiel Nr. 6.

§ 32.

Komplanationen durch Doppelintegrale in Kugelkoordinaten.

Wie in § 29 mögen die räumlichen Polarkoordinaten eines Punktes mit r, ψ, ω bezeichnet werden, und ausserdem sei in rechtwinkligen Koordinaten

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 1$$

die Gleichung der Ebene, welche die gegebene Fläche im Punkte $r\psi\omega$ berührt. Um zunächst A, B, C zu bestimmen, bringe man in Rechnung, dass die berührende Ebene durch drei Punkte gehen muss, deren Koordinaten sind:

$$\psi,\ \omega,\ r; \quad \psi + d\psi,\ \omega,\ r + \frac{\partial r}{\partial \psi} d\psi; \quad \psi,\ \omega + d\omega,\ r + \frac{\partial r}{\partial \omega} d\omega;$$

dies giebt folgende drei Gleichungen:

$$A \cos\psi \cos\omega + B \cos\psi \sin\omega + C \sin\psi = \frac{1}{r},$$

$$A \sin\psi \cos\omega + B \sin\psi \sin\omega - C \cos\psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \psi},$$

$$A \cos\psi \sin\omega - B \cos\psi \cos\omega \qquad = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \omega}.$$

Hieraus finden sich die Werte:

$$A = \frac{\cos\psi \cos\omega}{r} + \frac{\sin\psi \cos\omega}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \psi} + \frac{\sin\omega}{r^2 \cos\psi} \cdot \frac{\partial r}{\partial \omega},$$

$$B = \frac{\cos\psi \sin\omega}{r} + \frac{\sin\psi \sin\omega}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \psi} - \frac{\cos\omega}{r^2 \cos\psi} \cdot \frac{\partial r}{\partial \omega},$$

$$C = \frac{\sin\psi}{r} - \frac{\cos\psi}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \psi},$$

und es ist nun, wenn N den Winkel zwischen der Berührungsebene und der Äquatorialebene bezeichnet,

$$\sec N = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{C} = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right] \cos^2\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2}}{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \cos\psi - r \sin\psi\right) \cos\psi}.$$

Setzt man für den Augenblick $r \cos\psi = \varrho$, so ist $\varrho \, d\omega \, d\varrho$ das in ebenen Polarkoordinaten ausgedrückte Element der Äquatorialebene, mithin das Element der krummen Fläche

$$dS = \sec N . \varrho \, d\omega \, d\varrho = \sec N . r \cos\psi \, d\omega \frac{\partial (r \cos\psi)}{\partial \psi} d\psi;$$

nach Ausführung der Differentiation in Beziehung auf ψ und Substitution des Wertes von $\sec N$ erhält man eine Formel für dS, aus der durch Integration folgt

$$S = \int\!\!\int \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right] \cos^2\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} \cdot r \, d\omega \, d\psi.$$

Selbstverständlich ist für r sein Wert aus der Polargleichung der Fläche einzusetzen; die Integrationsgrenzen für ψ und ω bestimmen sich durch die Begrenzung des zu quadrierenden Flächenstücks.

Beispiele. 1. Die Gleichung der Fläche sei

$$r = c \frac{\sin \omega}{\sin \psi},$$

und als Horizontalprojektion des zu quadrierenden Stückes werde ein Kreis genommen, der b zum Durchmesser hat und die y-Achse im Koordinatenanfang berührt.

Zunächst ergiebt sich

$$S = 2c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\Psi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{\sin^2\omega \cos^2\psi + \cos^2\omega \sin^2\psi}}{\sin^3\psi} \sin\omega \, d\omega \, d\psi,$$

wobei die Integrationsgrenze Ψ auf folgende Weise bestimmt wird. Sind R, Ψ, ω die Polarkoordinaten eines Punktes auf der Begrenzungslinie der gesuchten Fläche, so ist zufolge der Gleichung der Fläche und wegen der gegebenen Horizontalprojektion

$$R = c \frac{\sin \omega}{\sin \Psi}, \quad R \cos \Psi = b \cos \omega,$$

mithin

$$\cot \Psi = \frac{b}{c} \cot \omega.$$

Setzt man im Doppelintegrale $\cos \omega = u$, $\cot \psi = t$, $\cot \Psi = T$, so erhält man

$$S = 2c^2 \int_0^1 \int_0^T \sqrt{(1-u^2)t^2 + u^2} \, . \, du \, dt, \quad T = \frac{bu}{c\sqrt{1-u^2}},$$

und durch Ausführung der Integrationen

$$S = \tfrac{1}{4}\pi \left\{ b\sqrt{b^2+c^2} + c^2 \, l\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}+b}{c}\right) \right\}.$$

Dasselbe Resultat hat sich in Nr. 15 des § 30 auf anderem Wege gefunden.

2. Eine Fläche sei durch die Polargleichung

$$r = c \frac{\cos 2\omega}{\sin \psi},$$

und eine in der xy-Ebene liegende Kurve durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^3 = 16 b^2 x^2 y^2$$

bestimmt; man sucht den Inhalt des Flächenstücks über dem zwischen den Achsen der x und y liegenden Blatte der Kurve.

Durch Anwendung der Substitution

$$\cot\psi = 2\zeta . \tan 2\omega$$

findet man

$$S = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ b\sqrt{b^2 + c^2} + c^2 l\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}+b}{c}\right)\right\}.$$

3. In der Horizontalebene xy sei eine Gerade AB konstruiert, die von der x-Achse die Strecke $OA = a$, von der y-Achse das Stück $OB = b$ abschneidet; durch einen beliebigen, zwischen A und B liegenden Punkt Q dieser Geraden und durch die z-Achse werde eine Vertikalebene gelegt, und in letzterer über OQ als Durchmesser ein Kreis konstruiert; alle diese Kreise bilden in stetiger Aufeinanderfolge eine wulstförmige Fläche. Man verlangt den Inhalt desjenigen Flächenstücks, das zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen enthalten ist.

Unter der Voraussetzung positiver a und b sei zur Abkürzung

$$AB = c, \quad \angle OAB = \gamma;$$

es ergiebt sich dann

$$S = \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\psi \, d\omega \, d\psi}{\sin^3(\omega+\gamma)},$$

das ist, wenn nach Ausführung der Integrationen $\cos\gamma = \frac{a}{c}$, $\sin\gamma = \frac{b}{c}$ gesetzt wird,

$$S = \frac{\pi}{8}\left\{\frac{a^3 + b^3}{c} + \frac{a^2 b^2}{c^2} l\left(\frac{a+b+c}{a+b-c}\right)\right\}.$$

4. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Geraden AB eine Lemniskate treten, für die

$$r = a\sqrt{\cos 2\omega} . \cos\psi$$

ist, so erhält man für die Gesamtoberfläche des Lemniskatenwulstes

$$S = \tfrac{1}{2}\pi^2 a^2.$$

5. Nimmt man in Nr. 3 statt der Geraden AB eine Kardioide, für die

$$r = b\,(1 + \cos\omega)\cos\psi$$

ist, so findet man als Gesamtoberfläche

$$S = \frac{16}{3}\pi b^2.$$

6. In Nr. 3 werde die Gerade AB durch die Fusspunktkurve einer aus den Halbachsen a und b konstruierten Ellipse ersetzt, und zur Abkürzung sei $\sqrt{a^2 + b^2} = c$; es ergiebt sich dann für die Gesamtoberfläche

$$S = 2\pi c P,$$

wo P die Peripherie einer Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a^2}{c}$ und $\frac{b^2}{c}$ bedeutet.

7. Von dem Mittelpunkte eines aus den Halbachsen a, b, c konstruierten Ellipsoids denke man sich Senkrechte auf alle Berührungsebenen der Fläche herabgelassen; die Fusspunkte dieser Senkrechten bilden dann eine Fläche, deren Gleichung ist

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2;$$

man verlangt die Komplanation dieser Fusspunktfläche.

In Polarkoordinaten ist die Gleichung der Fläche

$$r^2 = a^2 \cos^2\psi \cos^2\omega + b^2 \cos^2\psi \sin^2\omega + c^2 \sin^2\psi;$$

der Komplanationsformel erteile man die bequemere Gestalt

$$S = \int\int \sqrt{\left[r^4 + \left(r\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi + \left(r\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} \,.\, d\omega\, d\psi;$$

für den Oktanten der Fusspunktfläche ergiebt sich dann

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^4 \cos^2\psi \cos^2\omega + b^4 \cos^2\psi \sin^2\omega + c^4 \sin^2\psi} \,.\, \cos\psi\, d\omega\, d\psi,$$

oder, wenn

$$a^4 \cos^2\omega + b^4 \sin^2\omega - c^4 = Q$$

gesetzt wird,

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{c^4 + Q\cos^2\psi} \,.\, \cos\psi\, d\omega\, d\psi.$$

Benutzt man hier die Substitution

$$\frac{c^4 \sin^2\psi}{c^4 + Q\cos^2\psi} = u^2,$$

so erhält man das Integral in rationaler Form, nämlich

$$S = c^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{(c^4 + Q)\, d\omega\, du}{(c^4 + Qu^2)^2}$$

$$= c^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{(a^4 \cos^2 \omega + b^4 \sin^2 \omega)\, d\omega\, du}{[(a^4 \cos^2 \omega + b^4 \sin^2 \omega)\, u^2 + c^4 (1 - u^2)]^2}.$$

Durch Anwendung der weitern Substitution

$$\tan \omega = \frac{a^2}{b^2} \tan \chi$$

wird einfacher

$$S = a^6 b^6 c^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{d\chi\, du}{[a^4 b^4 u^4 + c^4 (b^4 \cos^2 \chi + a^4 \sin^2 \chi)(1 - u^2)]^2},$$

oder endlich für $u = \sin v$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a^6 b^6 c^6 \cos v\, dv\, d\chi}{(b^4 c^4 \cos^2 v \cos^2 \chi + c^4 a^4 \cos^2 v \sin^2 \chi + a^4 b^4 \sin^2 v)^2}.$$

Nach Nr. 23 des § 30 folgt hieraus, dass die Fusspunktfläche und das aus den Halbachsen

$$a_1 = \frac{bc}{a}, \quad b_1 = \frac{ca}{b}, \quad c_1 = \frac{ab}{c}$$

konstruierte Ellipsoid gleiche Oberflächen besitzen.

§ 33.

Vermischte Aufgaben über Doppelintegrale.

Nicht selten bieten Doppelintegrale die Eigentümlichkeit, dass sich bei der einen Anordnung der Integrationen zwar die erste, nicht aber die zweite Integration ausführen lässt, dass hingegen bei umgekehrter Anordnung der Integrationen beide Integrationen ausführbar sind; die Zusammenstellung der so erhaltenen Resultate liefert dann den Wert eines einfachen bestimmten Integrals. So ist z. B.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\theta\, dx}{a^2 - b^2 x^2 \sin^2\theta} = \frac{1}{2ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta},$$

dagegen umgekehrt, wenn $a > b$ ist

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx\, d\theta}{a^2 - b^2 x^2 \sin^2\theta} = \frac{\pi}{2a}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{\pi}{2ab}\arcsin\frac{b}{a},$$

mithin durch Vergleichung der beiderseitigen Resultate (§ 24 Nr. 1)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi\arcsin\frac{b}{a}, \quad a > b.$$

Auf dieser Bemerkung beruht folgende Methode zur Ermittelung der Werte gegebener einfacher Integrale. Man verwandle einen unter dem Integralzeichen vorkommenden Faktor in ein schon bekanntes Integral, mithin das gegebene einfache Integral in ein Doppelintegral, und kehre in letzterem die Reihenfolge der Integrationen um.

Will man hiernach den Wert von

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

finden, so erinnere man sich an die Gleichung

$$l\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right) = \int_0^1 \frac{2\alpha\beta\, dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$$

und benutze sie für $\alpha = a$, $\beta = b\sin\theta$; es wird dann

$$W = 2ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\theta\, dx}{a^2 - b^2 x^2 \sin^2\theta},$$

und durch umgekehrte Anordnung der Integrationen

$$W = \pi\arcsin\frac{b}{a}.$$

Beispiele. 1. Nach dem soeben benutzten Verfahren ergiebt sich (vergl. § 24 Nr. 2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\sin\theta\, d\theta = \pi\,\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad a>b.$$

2. Durch Benutzung der Formel

$$\arctan\frac{\beta}{\alpha} = \int_0^1 \frac{\alpha\beta\, dx}{\alpha^2+\beta^2 x^2}$$

findet man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \arctan\left(\frac{b}{a}\sin\theta\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{\pi}{2}\, l\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}\right).$$

3. Auf gleiche Weise gelangt man zu dem Resultate

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \arctan\left(\frac{b}{a}\sin\theta\right)\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}.$$

4. Durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{t} = \int_0^\infty e^{-tx}\, dx, \quad t>0$$

erhält man, wenn a, b; k endliche positive Grössen sind,

$$\int_k^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-k(a+x)}}{a+x}\, dx - \int_0^\infty \frac{e^{-k(b+x)}}{b+x}\, dx,$$

oder, wenn rechter Hand im ersten Integrale $a+x=z$, im zweiten $b+x=z$ gesetzt wird,

$$\int_k^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = \int_a^b \frac{e^{-kz}}{z}\, dz.$$

Geht man zur Grenze für unendlich abnehmende k über, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = l\left(\frac{b}{a}\right), \quad a>0,\ b>0;$$

in Übereinstimmung mit der Formel in § 23 II, Nr. 8.

5. Um

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

zu bestimmen (vergl. § 23 II Nr. 12), bilde man das Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=J^2$$

und führe in ihm Polarkoordinaten ein, so wird

$$J^2=\int_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{4},$$

also

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

6. Benutzt man die Substitution in Nr. 4 für $t=1+u^2$ und nachher die Formel 13 in § 23 II, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2hu}{1+u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\left(x+\frac{h^2}{x}\right)}dx,$$

oder für $x=\xi^2$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2hu}{1+u^2}\,du=\sqrt{\pi}\,.\,e^{-2h}\int_0^\infty e^{-\left(\xi-\frac{h}{\xi}\right)^2}d\xi.$$

Das noch übrige Integral findet sich mittels der Substitution

$$\xi-\frac{h}{\xi}=\eta;$$

es wird nämlich, positive h vorausgesetzt,

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2hu}{1+u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2h}\int_{-\infty}^\infty\left\{1+\frac{\eta}{\sqrt{4h+\eta^2}}\right\}e^{-\eta^2}d\eta=\frac{\pi}{2}e^{-2h}.$$

Für $u=\frac{\theta}{\alpha}$, $2h=\alpha\beta$ folgt hieraus die in Nr. 17 des § 23 II auf anderem Wege abgeleitete Formel.

7. Nach den in Nr. 18 des § 24 gegebenen Entwicklungen darf die Funktion

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-z} dz$$

als ebenso bekannt wie $l\mu$, $\sin\mu$ und dergleichen angesehen werden, und es ist daher genügend, ein Integral durch Gammafunktionen auszudrücken. Setzt man noch $z = ku$, wo k eine positive die Null übersteigende Grösse sein muss, so ist auch

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-ku} du = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}$$

sowie umgekehrt

$$\frac{1}{k^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-ku} du.$$

Von der letzteren Formel lässt sich Gebrauch machen zur Ermittelung des Integralwertes

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p+q}} d\theta.$$

Man erhält nämlich für $k = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ und $\mu = p + q$,

$$W = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^\infty u^{p+q-1} e^{-u(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta \, d\theta \, du,$$

ferner für $u = r^2$ und, wenn man $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ setzt, d. h. von Polarkoordinaten zu rechtwinkligen Koordinaten übergeht,

$$W = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-(ax^2+by^2)} dx\, dy.$$

Dieses Doppelintegral zerfällt in die beiden Faktoren

$$\int_0^\infty x^{2p-1} e^{-ax^2} dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty y^{2q-1} e^{-by^2} dy,$$

deren Werte sich mittels der Substitutionen $x^2 = \xi$ und $y^2 = \eta$ ergeben. Das Endresultat lautet bei positiven a und b

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p+q}} d\theta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q}.$$

Für $\cos^2\theta = z$ erhält dasselbe die algebraische Form

$$\int_0^1 \frac{z^{p-1}(1-z)^{q-1}\,dz}{[az+b(1-z)]^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p\,b^q},$$

oder, wenn $a-b=c$ gesetzt wird,

$$\int_0 \frac{z^{p-1}(1-z)^{q-1}}{(b+cz)^{p+q}}\,dz = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{(b+c)^p\,b^q}.$$

Mittels der Substitution $z=x:(1+x)$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung noch die folgende

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(ax+b)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p\,b^q},$$

die im speziellen Falle $q=1-p$ übergeht in

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{ax+b} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \cdot \frac{1}{a^p b^{1-p}}, \quad 0<p<1.$$

Aus diesen Formeln kann man dadurch neue Resultate ableiten, dass man beiderseits ein- oder mehrmal in Beziehung auf p oder q differenziert und dabei von den Gleichungen

$$dU = U.\,dlU, \quad \frac{dl\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^1 \frac{1-z^{\mu-1}}{1-z}\,dz$$

Gebrauch macht. Differenziert man z. B. die Gleichung

$$\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}\,dz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

partiell nach p, so erhält man

$$\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}\,l\left(\frac{1}{z}\right)dz = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \frac{z^{p-1}(1-z^q)}{1-z}\,dz.$$

Bemerkenswert ist der Spezialfall $p=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $z=y^2$; er giebt

$$\int_0^1 \frac{y^\mu}{\sqrt{1-y^2}}\, l\left(\frac{1}{y}\right) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu+1)} \int_0^1 \frac{y^\mu\, dy}{1+y}.$$

Wenn noch spezieller μ eine ganze positive Zahl m ist und links $y = \sin\omega$ gesetzt wird, so entstehen die Formeln

$$\int_0^1 \frac{y^m}{\sqrt{1-y^2}}\, l\left(\frac{1}{y}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m\omega \,.\, l\left(\frac{1}{\sin\omega}\right) d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m} \left\{ l2 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{m}\right)\right\}, \quad \text{für gerade } m,$$

$$= \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{m} - l2 \right\}, \quad \text{für ungerade } m.$$

Durch partielle Differentiation nach q erhält man

$$\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}\, l\left(\frac{1}{1-z}\right) dz = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \frac{z^{q-1}(1-z^p)}{1-z}\, dz$$

und als Spezialfälle hiervon

$$\int_0^1 \frac{y^\mu}{\sqrt{1-y^2}}\, l\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu+1)} \int_0^1 \frac{1-y^{\mu+1}}{1-y^2}\, dy,$$

$$\int_0^1 \frac{y^m}{\sqrt{1-y^2}}\, l\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m\omega \,.\, l\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m} \left\{ l2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m} \right\}, \quad \text{für gerade } m,$$

$$= \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{m} \right\}, \quad \text{für ungerade } m.$$

Auf gleiche Weise entstehen die allgemeineren Formeln

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(ax+b)^{p+q}}\, l\left(a + \frac{b}{x}\right) dx$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \left\{ la + \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^q)}{1-x}\, dx \right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(ax+b)^{p+q}}\, l(ax+b)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \left\{ lb + \int_0^1 \frac{x^{q-1}(1-x^p)}{1-x}\,dx \right\},$$

deren Differenz giebt

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,lx}{(ax+b)^{p+q}}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \left\{ l\left(\frac{b}{a}\right) - \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{x(1-x)}\,dx \right\}.$$

Substituiert man links $x = cot^2\theta$, so hat man auch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{cos^{2p-1}\theta\, sin^{2q-1}\theta}{(a\,cos^2\theta + b\,sin^2\theta)^{p+q}}\, l(a + b\,tan^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \left\{ la + \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^q)}{1-x}\,dx \right\},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{cos^{2p-1}\theta\, sin^{2q-1}\theta}{(a\,cos^2\theta + b\,sin^2\theta)^{p+q}}\, l(a\,cot^2\theta + b)\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \left\{ lb + \int_0^1 \frac{x^{q-1}(1-x^p)}{1-x}\,dx \right\},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{cos^{2p-1}\theta\, sin^{2q-1}\theta}{(a\,cos^2\theta + b\,sin^2\theta)^{p+q}}\, l\,cot\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{4\,\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \left\{ l\left(\frac{b}{a}\right) - \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{x(1-x)}\,dx \right\}.$$

8. Aus den im vorigen Abschnitte entwickelten Formeln lässt sich der Wert des Doppelintegrals

$$S = \int_0^1\!\!\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}(1+xy)^\mu}{(1+y)^{\mu+1}\,y^\nu}\,dx\,dy$$

auf folgende Weise herleiten. Statt x führe man eine neue Variable ξ ein mittels der Substitution

$$\frac{x(1+y)}{1+xy} = \xi \quad \text{oder} \quad x = \frac{\xi}{1+y-y\xi}$$

und integriere nachher in Beziehung auf y; dies giebt

$$S = \frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} \int_0^1 \xi^{\lambda-1}(1-\xi)^{\nu-1}\,d\xi$$

$$= \frac{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda+\nu)}$$

mithin zusammengenommen

$$\int_0^1\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}(1+xy)^{\mu}}{(1+y)^{\mu+1}y^{\nu}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sin\nu\pi} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)\,\Gamma(\lambda+\nu)},$$

$$\lambda > 0, \quad \lambda+\mu+1 > 0, \quad 0 < \nu < 1.$$

Durch Substitution von $x = z^2$, $y = \tan^2\varphi$ erhält dieses Resultat die folgende Gestalt

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} z^{2\lambda-1}(\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi)^{\mu}\cot^{2\nu-1}\varphi\,dz\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4\sin\nu\pi} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)\,\Gamma(\lambda+\nu)}$$

$$\lambda > 0, \quad \lambda+\mu+1 > 0, \quad 0 < \nu < 1.$$

Beispielsweise ergiebt sich hieraus

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{z^{2\lambda-1}\,dz\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\right)^2$$

und spezieller, wenn $2\lambda - 1$ eine ganze positive Zahl ist,

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{z^m\,dz\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}} = \left(\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2, \text{ für gerade } m,$$

$$= \left(\frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}\right)^2, \text{ für ungerade } m.$$

Hieran knüpfen sich u. a. die Formeln

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\arcsin(\varepsilon z)}{z\sqrt{1-\varepsilon^2 z^2}} \cdot \frac{dz\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{4}\pi^2 \arcsin\varepsilon,$$

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l(\varepsilon z+\sqrt{1+\varepsilon^2 z^2})}{z\sqrt{1+\varepsilon^2 z^2}}\cdot\frac{dz\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+z^2\sin^2\varphi}}=\tfrac{1}{4}\pi^2 l(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2}),$$

wie man durch Reihenentwicklungen leicht findet.

Differenziert man das mit S bezeichnete Doppelintegral nebst seinem Werte partiell nach λ, so gelangt man zu dem Resultate

$$\int_0^1\int_0^\infty\frac{x^{\lambda-1}(1+xy)^\mu}{(1+y)^{\mu+1}y^\nu}\,l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sin\nu\pi}\cdot\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)\,\Gamma(\lambda+\nu)}\int_0^1\frac{x^{\lambda-1}(1-x^{\mu+1}-x^\nu+x^{\mu+\nu})}{1-x}\,dx,$$

das für $x=z^2$, $y=\tan^2\varphi$ die Form annimmt

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}z^{2\lambda-1}\,l\left(\frac{1}{z}\right)(\cos^2\varphi+z^2\sin^2\varphi)^\mu\cot^{2\nu-1}\varphi\,dz\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{8\sin\nu\pi}\cdot\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)\,\Gamma(\lambda+\nu)}\int_0^1\frac{x^{\lambda-1}(1-x^{\mu+1}-x^\nu+x^{\mu+\nu})}{1-x}\,dx.$$

Beispielsweise ist hiernach, wenn auch rechter Hand $x=z^2$ genommen wird,

$$\int_0^1\int_0^\infty\frac{z^{2\lambda-1}}{\sqrt{\cos^2\varphi+z^2\sin^2\varphi}}\,l\left(\frac{1}{z}\right)dz\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\right)^2\int_0^1\frac{z^{2\lambda-1}}{1+z}\,dz$$

und für den Fall eines ganzen positiven $2\lambda-1$

$$\int_0^1\int_0^\infty\frac{z^m}{\sqrt{\cos^2\varphi+z^2\sin^2\varphi}}\,l\left(\frac{1}{z}\right)dz\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\right)^2\left\{l2-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{m}\right)\right\},\ \text{bei geradem } m,$$

$$=2\left(\frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\ldots m}\right)^2\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{m}-l2\right\},\ \text{bei ungeradem } m.$$

9. Das zu Anfang dieses Paragraphen bezeichnete Verfahren zur Wertermittelung gegebener einfacher Integrale liefert in manchen Fällen nur eine Transformation des ursprünglichen Integrals; dass aber auch diese von Nutzen sein kann, möge das folgende Beispiel zeigen.

Verwandelt man das Integral

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}, \quad \varkappa^2 < 1$$

durch Substitution von

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(1-x^2)\cos^2\theta + (1-\varkappa^2x^2)^2\sin^2\theta}$$

in ein Doppelintegral, führt in letzterem die Integration nach x aus und setzt zur Abkürzung $1 - \varkappa^2 = \lambda^2$, so erhält man

$$K = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\right) d\theta.$$

Diese Gleichung lässt sich folgendermassen darstellen:

$$K = \frac{2}{\pi}\left\{l\left(\frac{2}{\lambda}\right)A + B - C\right\},$$

worin A, B, C die Bedeutungen haben

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\, d\theta, \quad B = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\, l\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta,$$

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\, l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\right) d\theta.$$

Da $\lambda^2 < 1$ ist, können alle drei Integrale nach Potenzen von λ entwickelt werden; für A erhält man sehr leicht

$$A = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\lambda^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\lambda^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\lambda^6 + \cdots\right\}.$$

Zur Bestimmung von B dient die Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta\, l\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{4\,\Gamma(n+1)} \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{x}}\, dx,$$

die durch Substitution von $x = y^2$ und mit Hilfe der Abkürzung

$$s_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}$$

übergeht in

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta\, l\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}(l2 - s_{2n});$$

hiernach findet sich

$$B = \frac{\pi}{2}\left\{l2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2(l2 - s_2)\lambda^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2(l2 - s_4)\lambda^4 + \cdots\right\}.$$

Um C zu entwickeln, beachte man, dass (S. 290 d. I. Tls.) für $x^2 < 1$ die Gleichung

$$l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right) = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{32}x^2 + \tfrac{5}{96}x^3 + \cdots$$

gilt und dass hiernach eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\, l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

bestehen muss. Multipliziert man mit $\sqrt{1-x}$, differenziert nach x, multipliziert mit $2\sqrt{1-x}$, entwickelt linker Hand $\sqrt{1-x}$ und vergleicht die beiderseitigen Koeffizienten von x^{n-1}, so gelangt man zu der Rekursionsformel

$$2na_n - (2n-1)a_{n-1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots.(2n)};$$

durch Substitution von

$$a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}b_n$$

geht dieselbe über in

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

und hieraus folgt wegen $b_0 = a_0 = 0$

$$b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} = s_{2n},$$

$$a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}s_{2n}.$$

Für $x = \lambda^2 \sin^2\theta$ findet sich nun

$$C = \frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 s_2\lambda^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 s_4\lambda^4 + \cdots\right\}$$

und durch Zusammenfassung der für A, B, C erhaltenen Reihen

$$K = l\left(\frac{4}{\lambda}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - 2s_2\right]\lambda^2$$
$$+ \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - 2s_4\right]\lambda^4$$
$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - 2s_6\right]\lambda^6 + \cdots$$

Diese Entwicklung bietet einen wesentlichen Vorteil, sobald $\varkappa$ wenig kleiner als die Einheit ist, mithin λ der Null nahe liegt. Bei sehr kleinen λ ist angenähert $K = l\left(\frac{4}{\lambda}\right)$, wie auf anderem Wege in § 24 Nr. 16 gefunden wurde.

Nach demselben Verfahren kann man das Integral

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2 x^2}{1 - x^2}}\, dx$$

in eine Reihe verwandeln, man gelangt aber kürzer dazu mittels der Bemerkung, dass

$$E - \lambda^2 K + \lambda(1 - \lambda^2)\frac{dK}{d\lambda} = \varkappa^2 \int_0^1 \frac{1 - 2x^2 + \varkappa^2 x^4}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)^3}}\, dx$$

ist und dass das rechts stehende Integral, unbestimmt genommen, den Wert

$$x\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - \varkappa^2 x^2}}$$

besitzt, der sowohl für $x = 1$ als für $x = 0$ verschwindet. Setzt man in der hiermit gewonnenen Relation

$$E = \lambda^2 K - \lambda(1 - \lambda^2)\frac{dK}{d\lambda}$$

für K die vorige Reihe, so erhält man

$$E = 1 + \tfrac{1}{2}\left[l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - s_2\right]\lambda^2$$
$$+ \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - (s_2 + s_4)\right]\lambda^4$$
$$+ \tfrac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{\lambda}\right) - (s_4 + s_6)\right]\lambda^6 + \cdots$$

Die beiden ersten Summanden führen auf die in § 24 Nr. 17 abgeleitete Näherungformel zurück.

10. Eine geometrische Anwendung der in Nr. 8 entwickelten Formeln ist folgende. Unter der Voraussetzung positiver λ, μ, ν schliesst die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\mu} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\nu} = 1$$

mit den positiven Seiten der Koordinatenebenen einen endlichen Raum V ein; für diesen ist

$$V = \iint c\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda} - \left(\frac{y}{b}\right)^{\mu}\right]^{\frac{1}{\nu}} dx\,dy,$$

wobei sich die Integrationen auf alle positiven x und y beziehen, welche der Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\mu} \leqq 1$$

genügen. Setzt man erst $x = a x_1^{\frac{2}{\lambda}}$, $y = b y_1^{\frac{2}{\mu}}$, dann $x_1 = r\cos\theta$, $y_1 = r\sin\theta$, so kommt man auf ein Doppelintegral, dessen Integrationsbereich ein Kreisquadrant ist; und wenn man noch $r^2 = u$ nimmt, so erhält man durch Ausführung der doppelten Integration, die sich hier auf das Produkt zweier einfachen Integrale reduziert,

$$V = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)}\,abc.$$

Die in § 28, Nr. 36 bis 40 behandelten Aufgaben sind spezielle Fälle hiervon.

Kapitel VII.

Die dreifachen Integrale.

§ 34.

Allgemeine Formeln und Regeln.

1. Seiner ursprünglichen Bedeutung nach ist das bestimmte dreifache Integral

$$W = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

der Grenzwert einer dreifachen Summe, deren Summanden die Form $F(x, y, z)\, \varDelta x\, \varDelta y\, \varDelta z$ haben; die Integrationsgrenzen bestimmen hierbei den Spielraum, der den Variabeln x, y, z angewiesen ist. Denkt man sich x, y, z als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume, und den Raum mit einer nichthomogenen Masse erfüllt, deren Dichtigkeit im Punkte xyz durch die Funktion $F(x, y, z)$ ausgedrückt wird, so ist $dx\, dy\, dz$ der körperliche Inhalt eines aus den Kanten dx, dy, dz konstruierten Parallelepipeds, d. h. eines Volumenelements; ferner bedeutet $F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ die in jenem Volumenelemente enthaltene Masse, d. h. kurz das Massenelement; endlich ist das obige dreifache Integral die Summe aller nach den drei Dimensionen des Raums verteilten Massenelemente, d. h. die Gesamtmasse eines Körpers, dessen Begrenzung durch die Integrationsgrenzen bestimmt ist. Der Quotient aus W und dem Volumen V des Körpers giebt nachher die mittlere Dichtigkeit des betreffenden Körpers.

In allen Fällen, wo die erste auf z bezügliche Integration direkt ausgeführt werden kann, reduziert sich das dreifache Integral sofort auf ein Doppelintegral, dessen weitere Behandlung den Gesetzen des vorigen Kapitels unterliegt. Lässt sich dagegen die erste Integration entweder gar nicht in geschlossener Form bewirken, oder liefert

deren Ausführung sehr verwickelte Formeln, so greift man zu den in Nr. 2 und 3 erwähnten Mitteln.

2. Die Reihenfolge der Integrationen darf geändert werden, sobald man die hierbei nötigen Änderungen der Integrationsgrenzen beachtet. Am einfachsten ist die Sache in dem Falle, wo alle sechs Integrationsgrenzen absolute Konstanten sind, d. h. wenn der Spielraum des Punktes xyz aus einem rechtwinkligen Parallelepiped besteht, dessen Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen liegen; die verschiedene Anordnung der Integrationen bedingt dann nur eine verschiedene Stellung, aber keine Wertänderung der Grenzen. So ist z. B.

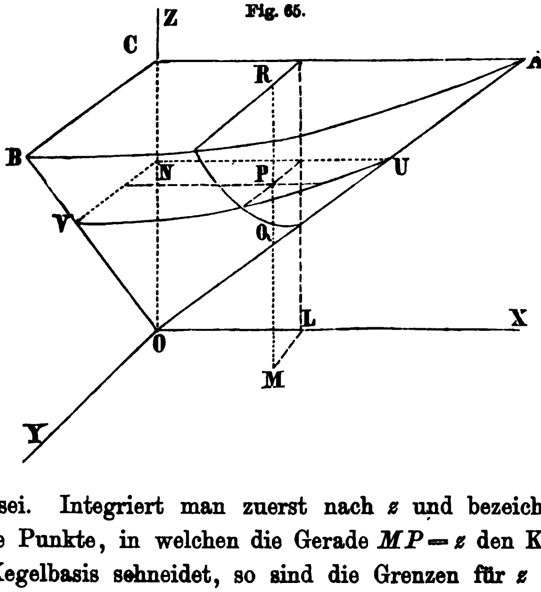
$$\int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b}\int_{c_0}^{c} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{b_0}^{b}\int_{c_0}^{c}\int_{a_0}^{a} F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx.$$

Als Beispiel für den Fall, wo die Grenzen geändert werden müssen, diene das Integral

$$W = \int\int\int \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz,$$

worin dem Punkte xyz ein aus den Geraden $AC = a$, $BC = b$, $OC = c$ konstruierter Kegelquadrant (Fig. 65) als Spielraum an-

Fig. 65.



gewiesen sei. Integriert man zuerst nach z und bezeichnet mit Q und R die Punkte, in welchen die Gerade $MP = z$ den Kegelmantel und die Kegelbasis schneidet, so sind die Grenzen für z

$$z_0 = MQ = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad Z = MR = c;$$

nachher müssen die Grenzen für $OL = x$ und $LM = y$ so gewählt werden, dass der Punkt R alle Stellen der Ellipsenquadrantenfläche ACB betritt, woraus folgt

$$y_0 = 0, \quad Y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}; \quad x_0 = 0, \quad X = a.$$

Schreibt man dagegen

$$W = \int\int\int \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dz\, dx\, dy,$$

so bleibt anfangs z konstant und der Punkt P ist in der Querschnittfläche herumzuführen, die in der Höhe $ON = MP = z$ parallel zur xy-Ebene liegt; dieser Querschnitt bildet eine aus den Halbachsen

$$NU = \frac{az}{c}, \quad NV = \frac{bz}{c}$$

konstruierte Ellipse, und daher ist hier

$$y_0 = 0, \quad Y = b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad x_0 = 0, \quad X = \frac{az}{c};$$

um endlich alle Querschnitte des Körpers zu durchlaufen, muss z von

$$z_0 = 0 \quad \text{bis} \quad Z = c$$

ausgedehnt werden. Das Resultat ist in beiden Fällen

$$W = \tfrac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c},$$

jedoch verursacht die zweite Anordnung der Integrationen etwas geringeren Rechnungsaufwand als die erste.

Der soeben erwähnte Vorteil tritt besonders hervor, wenn man das allgemeinere Integral

$$W = \int\int\int xy\, f(z)\, dx\, dy\, dz$$

betrachtet, wo $f(z)$ eine beliebige Funktion von z, und der Integrationsbereich für x, y, z derselbe wie vorhin sein möge. Fängt man die Integrationen mit z an, so bleibt schon die erste Integration unausführbar, dagegen erhält man bei der anderen Anordnung y, x, z

$$W = \frac{a^2 b^2}{8 c^4} \int_0^c z^4 f(z)\, dz.$$

3. Das dreifache Integral

$$W = \int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus einem auf z bezüglichen einfachen Integrale und aus einem nachfolgenden Doppelintegrale in Beziehung auf x und y. Letzteres gestattet die Einführung von ebenen Polarkoordinaten, und es bezeichne zu diesem Zwecke p die Horizontalprojektion des Radiusvektor OP, sowie ω den Winkel zwischen der x-Achse und p; es ist dann

$$x = p \cos \omega, \quad y = p \sin \omega, \quad dx\, dy = p\, d\omega\, dp,$$

mithin

$$\int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int F(p \cos \omega,\ p \sin \omega,\ z) p\, d\omega\, dp\, dz.$$

Die Grössen p, ω, z bilden ein System von Cylinderkoordinaten mit der Polarachse z.

Bezeichnet r den Radiusvektor OP und ψ den Neigungswinkel von OP gegen die Ebene xy, so lässt sich wieder das in der vorigen Gleichung enthaltene Doppelintegral mit den Variabeln p und z dadurch transformieren, dass man

$$p = r \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad dp\, dz = r\, d\psi\, dr$$

substituiert, dies giebt

$$\int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\int\int F(r \cos \psi \cos \omega,\ r \cos \psi \sin \omega,\ r \sin \psi)\, r^2 \cos \psi\, d\omega\, d\psi\, dr.$$

Die Grössen r, ψ, ω bilden ein System von Kugelkoordinaten; dabei ist die z-Achse die Polarachse, die xy-Ebene die Äquatorebene, ω die geographische Länge, ψ die geographische Breite des Punktes P, den man sich auf einer mit dem Radius r beschriebenen Kugel denken kann.

Die Integrationsgrenzen für die neuen Koordinaten sind besonders zu bestimmen, indem man auch die Begrenzung des gegebenen Körpers in Polarkoordinaten ausdrückt.

Ist z. B. dem Punkte xyz der vorhin betrachtete Kegelquadrant als Spielraum angewiesen, so fängt r mit 0 an und hört mit demjenigen r auf, welches entsteht, wenn OP bis zum Durchschnitte mit der Begrenzungsebene ABC verlängert wird; die Grenzen für r sind demnach

$$r_0 = 0 \quad \text{und} \quad R = c \csc \psi.$$

Ferner hat man als Grenzen für ψ die Werte ψ_0 und $\Psi = \frac{1}{2}\pi$, wobei sich ψ_0 aus der Gleichung der Kegelfläche findet, indem man letztere in Polarkoordinaten transformiert, also

$$\psi_0 = artan\left[c\sqrt{\left(\frac{\cos\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\omega}{b}\right)^2}\right].$$

Endlich sind

$$\omega_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Omega = \tfrac{1}{2}\pi$$

die Integrationsgrenzen für ω.

Nicht selten wählt man die x-Achse zur Polarachse, mithin die yz-Ebene zur Äquatorialebene und bezeichnet mit θ den Winkel zwischen x und r (das Komplement der Breite), sowie mit χ den Neigungswinkel der Ebene von θ gegen die xy-Ebene (die Länge); es ist dann analog

$$\int\!\!\int\!\!\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int F(r\cos\theta,\ r\sin\theta\cos\chi,\ r\sin\theta\sin\chi)\, r^2 \sin\theta\, d\chi\, d\theta\, dr,$$

wobei die Integrationsgrenzen auf ähnliche Weise wie vorhin bestimmt werden.

4. Wenn überhaupt statt der ursprünglichen Variabeln x, y, z drei neue Variable r, s, t eingeführt werden sollen, die mit jenen durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(r, s, t), \quad y = \psi(r, s, t), \quad z = \chi(r, s, t)$$

verbunden sind, so geschieht dies mittels der allgemeinen Formel

$$\int\!\!\int\!\!\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int\!\!\int F(\varphi, \psi, \chi)\, N\, dr\, ds\, dt,$$

worin N folgenden Ausdruck bezeichnet

$$N = \frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right).$$

Die Integrationsgrenzen für r, s, t sind in jedem speziellen Falle besonders zu bestimmen.

§ 35.

Beispiele für dreifache Integrationen.

1. Wird dem Punkte xyz der im vorigen Paragraphen erwähnte Kegelquadrant als Spielraum angewiesen, so ergiebt sich

$$\iiint x^m\,dx\,dy\,dz = \frac{a^{m+1}bc}{(m+2)(m+3)}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m\omega\,d\omega.$$

2. Unter den nämlichen Bedingungen findet man

$$\iiint z^m\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{abc^{m+1}}{m+3}.$$

In dem speziellen Falle $m = -1$ ist der Integralwert unabhängig von c.

3. Wenn die Dichtigkeit im Punkte xyz durch die Formel

$$\varDelta = Ax + By + Cz$$

bestimmt ist, so beträgt die Masse des vorigen Kegelquadranten

$$M = \tfrac{1}{4}abc\left(\frac{Aa + Bb}{3} + \frac{\pi Cc}{4}\right).$$

4. Die Kegelsubstanz bestehe aus unendlich dünnen Kugelschalen, von denen jede für sich homogen sein möge, und es wachse die Dichtigkeit proportional dem Quadrate der Entfernung, also

$$\varDelta = x^2 + y^2 + z^2;$$

es ist dann die Masse des ganzen Kegels

$$M = \tfrac{1}{20}\pi abc(a^2 + b^2 + 4c^2).$$

5. Der Annahme

$$\varDelta = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

entspricht eine Zusammensetzung aus gewissen ellipsoidischen Schichten; die Masse des vorigen Kegels beträgt dann

$$M = \tfrac{3}{10}\pi abc.$$

6. Nimmt man

$$\varDelta = \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2},$$

was einer ähnlichen Zusammensetzung entspricht, so folgt als Masse des Kegels

$$M = \pi l2\,.\,abc.$$

7. In einem mit dem Radius R beschriebenen Kugeloktanten ändere sich die Dichtigkeit nach dem Gesetze

$$\Delta = \frac{xyz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}};$$

man sucht die Masse des Körpers.

Hier können ebensowohl rechtwinklige als polare Koordinaten benutzt werden; im letzteren Falle ist es bequem, $sin^2 \omega = u$ und $sin^2 \psi = t$ zu substituieren; man erhält

$$M = \frac{R^5}{15} \cdot \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}.$$

8. Unter der Voraussetzung, dass der Punkt xyz den zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen enthaltenen Oktanten eines aus den Halbachsen a, b, c konstruierten Ellipsoids nicht überschreitet, soll der Wert von

$$M = \iiint \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entwickelt werden.

Substituiert man $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$, so kommt diese Aufgabe auf die vorige zurück, und es ergiebt sich

$$M = \frac{a^2 b^2 c^2}{15} \cdot \frac{bc + ca + ab}{(b + c)(c + a)(a + b)}.$$

9. Wenn x, y, z an die vorige Bedingung geknüpft werden, ist

$$\iiint \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{8(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left\{ b^2 c^2 l\left(\frac{c}{b}\right) + c^2 a^2 l\left(\frac{a}{c}\right) + a^2 b^2 l\left(\frac{b}{a}\right) \right\}.$$

10. Unter denselben Bedingungen ist

$$\iiint \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{(b + c)(c + a)(a + b)}.$$

11. Unter den vorigen Bedingungen ist

$$\iiint \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{4(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left\{ a^2 l\left(\frac{c}{b}\right) + b^2 l\left(\frac{a}{c}\right) + c^2 l\left(\frac{b}{a}\right) \right\}.$$

12. Unter denselben Voraussetzungen ist

$$\iiint \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} = \frac{1}{8} \frac{abc(a + b + c)}{(b + c)(c + a)(a + b)}.$$

13. Um den festen Punkt O herum befindet sich eine Substanz, in der die Dichtigkeit an der Stelle P umgekehrt proportional der Entfernung OP ist; man sucht die Masse einer mit dem Radius a beschriebenen, aus jener Substanz gebildeten Kugel, deren Oberfläche durch den Punkt O geht.

Bezeichnet k die in der Entfernung 1 vorhandene Dichtigkeit, wird ferner O zum Anfange eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und die Gerade von O nach dem Kugelmittelpunkte zur z-Achse genommen, so ist

$$M = \int\int\int \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz,$$

wobei sich die Integrationen auf alle der Bedingung

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 \overline{\gtrless}\, a^2$$

genügenden x, y, z beziehen. Durch Einführung von Polarkoordinaten mittels der Formeln

$$x = r \cos\psi \cos\omega, \quad y = r\cos\psi \sin\omega, \quad z = r \sin\psi$$

ergiebt sich

$$M = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2a\sin\psi} r\cos\psi\, d\omega\, d\psi\, dr = \tfrac{4}{3}\pi a^2 k.$$

Die im Kugelmittelpunkte vorhandene Dichtigkeit $\frac{k}{a}$ ist hiernach die mittlere Dichtigkeit der Kugel.

14. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle des Dichtigkeitsgesetzes $\frac{k}{r}$ das neue Gesetz $\frac{k}{r^2}$ treten, so erhält man als Masse der Kugel

$$M = 2\pi a k;$$

die mittlere Dichtigkeit ist jetzt diejenige, welche in der Entfernung $\sqrt{\frac{3}{2}}\,.\, a$ vorkommt.

15. Das Gesetz, nach welchem sich die Dichtigkeit einer Substanz ändert, sei wie vorhin $\frac{1}{r^2}$, wobei zur Vereinfachung der konstante Faktor $k = 1$ gesetzt ist; man hat ferner aus den Halbachsen a, b, c ein dreifaches Ellipsoid konstruiert, dessen Mittelpunkt auf der z-Achse in der Höhe c liegt, dessen Gleichung also lautet

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{c}\right)^2 = 1;$$

gesucht wird nun die im Ellipsoide enthaltene Masse.

Führt man die Polarkoordinaten r, ψ, ω ein, integriert in der Reihenfolge r, ω, ψ und setzt $\sin^2\psi = t$, so erhält man

$$M = 2\pi abc \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{[c^2 + (a^2 - c^2)t][c^2 + (b^2 - c^2)t]}}.$$

Hierbei sind die Fälle zu unterscheiden, ob $a^2 - c^2$ und $b^2 - c^2$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Im ersten Falle (d. h. wenn c entweder die kleinste oder die grösste Halbachse ist) ergiebt sich

$$M = \frac{4\pi abc}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}\, l\left(\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)}}{\sqrt{(a+c)(b+c)} - \sqrt{(a-c)(b-c)}}\right),$$

oder unter Benutzung eines Hilfswinkels δ

$$M = \frac{4\pi abc}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}\, l \cot\tfrac{1}{2}\delta, \quad \cos\delta = \sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{(a+c)(b+c)}}.$$

Im zweiten Falle (d. h. wenn c die mittlere Halbachse ist) wird

$$M = \frac{8\pi abc}{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}} \arctan\sqrt{\frac{(a-c)(c-b)}{(a+c)(c+b)}}.$$

16. Zwei ähnliche konzentrische Ellipsoide, von denen das grössere die Halbachsen a, b, c, das kleinere die Halbachsen εa, εb, εc besitzen möge, umschliessen eine ellipsoidische Schale; innerhalb derselben sei die Dichtigkeit bestimmt durch die Gleichung

$$\varDelta = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

der eine Übereinanderlagerung von konzentrischen unendlich dünnen homogenen Kugelschalen entspricht. Man sucht die Masse der ellipsoidischen Schale.

Durch unmittelbare Einführung von Polarkoordinaten ergiebt sich

$$M = 8l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi\, d\omega\, d\psi = 4\pi l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

17. Wird in der vorigen ellipsoidischen Schale die Dichtigkeit durch die Gleichung

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

bestimmt, so ist die Masse

$$M = \tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

18. Gesucht wird die Masse eines aus den Halbachsen a, b, c konstruierten Ellipsoids, innerhalb dessen die Dichtigkeit jedes Massenelements umgekehrt proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkte des Körpers ist.

Durch unmittelbare Einführung von Polarkoordinaten mittels der Formeln

$$x = r\cos\psi\cos\omega, \quad y = r\cos\psi\sin\omega, \quad z = r\sin\psi$$

erhält man, wenn in der Reihenfolge r, ω, ψ integriert und $\sin\psi = t$ gesetzt wird,

$$M = 2\pi ab\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2-c^2}{c^2}t^2\right)\left(1+\frac{b^2-c^2}{c^2}t^2\right)}}.$$

Nimmt man dagegen die x-Achse zur Polarachse und setzt dementsprechend

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\chi, \quad z = r\sin\theta\sin\chi,$$

so findet man für $\cos\theta = u$

$$M = 2\pi bc\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}u^2\right)\left(1-\frac{a^2-c^2}{a^2}u^2\right)}}.$$

Die Identität beider Ausdrücke ist mittels der Substitutionen

$$t = \frac{c}{\sqrt{c^2+w}}, \quad u = \frac{a}{\sqrt{a^2+w}}$$

leicht zu konstatieren; dieselben führen zu der symmetrischen Formel

$$M = \pi abc\int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}}.$$

Im Falle $a > b > c$ lässt sich M durch die Substitution

$$u = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cdot\sin\varphi$$

auf ein elliptisches Integral erster Art zurückführen. Wenn das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, kann die noch übrige Integration in geschlossener Form vollzogen werden.

19. Man sucht die Masse eines aus den Halbachsen a_1, b_1, c_1 konstruierten Ellipsoids, innerhalb dessen die Dichtigkeit jedes Massenelementes umgekehrt proportional ist dem Quadrate seiner Entfernung vom Mittelpunkte des Körpers.

Bei direkter Einführung von Polarkoordinaten bleibt nach der auf r bezüglichen Integration ein unbequemes irrationales Doppelintegral übrig; man vermeidet letzteres dadurch, dass man erst $x = a_1 \xi$, $y = b_1 \eta$, $z = c_1 \zeta$, nachher

$$\xi = \varrho \cos\theta, \quad \eta = \varrho \sin\theta \cos\chi, \quad \zeta = \varrho \sin\theta \sin\chi$$

setzt und in der Reihenfolge ϱ, χ, θ integriert; für $\cos\theta = u$ ergiebt sich dann

$$M = 4\pi a_1 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1 - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_1^2} u^2\right)\left(1 - \frac{c_1^2 - a_1^2}{c_1^2}\right) u^2}}.$$

Giebt man den Halbachsen die Werte

$$a_1 = \frac{bc}{2a}, \quad b_1 = \frac{ca}{2b}, \quad c_1 = \frac{ab}{2c},$$

so wird die Masse des Ellipsoids gleich der Masse des in Nr. 18 betrachteten Ellipsoids.

20. Ein Körper sei von der Fusspunktfläche eines aus den Halbachsen a, b, c konstruierten Ellipsoids begrenzt, und innerhalb desselben sei die Dichtigkeit jedes Massenelementes umgekehrt proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkte des Körpers; die Masse ist dann

$$M = \tfrac{2}{3}\pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

21. Wenn in dem vorigen Körper die Dichtigkeit jedes Elementes direkt proportional seinem Abstande vom Mittelpunkte genommen wird, so ist die Masse

$$M = \tfrac{1}{15}\pi\{3(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\}.$$

22. In dem vorigen Körper sei die Dichtigkeit jedes Elementes umgekehrt proportional dem Quadrate seines Abstands vom Koordinatenanfang; es ergiebt sich dann für

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\chi, \quad z = r\sin\theta\sin\chi$$

und wenn nach Ausführung der auf r bezüglichen Integration $\cos\theta = t$ gesetzt wird,

$$M = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \sqrt{s + (a^2 - s)t^2}\cdot d\chi\, dt, \quad s = b^2\cos^2\chi + c^2\sin^2\chi.$$

Das Integral erhält eine rationale Form durch die Substitution

$$\frac{at}{\sqrt{s + (a^2 - s)t^2}} = u;$$

nachher lässt sich die auf χ bezügliche Integration ausführen, so dass übrig bleibt

$$M = 2\pi a\int_0^1 \left\{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2u^2} + \frac{1-\mu^2}{1-\mu^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1-\lambda^2u^2)(1-\mu^2u^2)}},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad \mu = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}.$$

Bezeichnet S die Oberfläche eines aus den Halbachsen a, $\frac{ac}{b}$ und c konstruierten Ellipsoids, so ist hiernach

$$M = \frac{b}{ac}S$$

23. Um einen Punkt C herum ist eine Substanz so geschichtet, dass die Dichtigkeit eines im Punkte P befindlichen Massenelementes $= \frac{1}{CP}$ ist; aus dieser Substanz ist eine Kugelschale geschnitten, deren Mittelpunkt O nicht mit C zusammenfällt; man sucht die Masse derselben.

Bezeichnet a den kleinern, b den grössern Radius der Kugelschale, c die Entfernung OC, und wird letztere zur Polarachse genommen, so ist

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{r^2\sin\theta\, d\chi\, d\theta\, dr}{\sqrt{c^2 - 2cr\cos\theta + r^2}},$$

oder, wenn in der Reihenfolge χ, θ, r integriert wird,

$$M = \frac{2\pi}{c}\int_a^b \left(\sqrt{c^2 + 2cr + r^2} - \sqrt{c^2 - 2cr + r^2}\right) r\, dr.$$

Um die Vorzeichen der Wurzeln zu bestimmen, müssen die drei Fälle unterschieden werden, ob c innerhalb des von der Kugelschale umschlossenen Hohlraums liegt $(c < a < b)$, oder im ausgeschlossenen äussern Raume $(c > b > a)$, oder in der Masse der Kugelschale selbst $(a < c < b)$. Unter der ersten Voraussetzung sind alle r grösser als c; und die Entfernung $CP = \sqrt{c^2 - 2cr\cos\theta + r^2}$ geht für $\theta = \pi$ in $r + c$, dagegen für $\theta = 0$ in $r = c$ über; dies giebt

$$M = 2\pi(b^2 - a^2), \quad c < a < b.$$

Im zweiten Falle sind alle $r < c$, und die Grenzwerte von CP werden $c + r$ und $c - r$; daher ist

$$M = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{b^3 - a^3}{c}, \quad c > b > a.$$

Die Masse der Kugelschale beträgt hier ebensoviel, als wenn dieselbe homogen wäre und die im Mittelpunkte O vorhandene Dichtigkeit hätte.

Im letzten Falle sind die verschiedenen r teils grösser, teils kleiner als c; sie lassen sich dadurch trennen, dass man das von a bis b gehende Integral in zwei von a bis c und von c bis b gehende Integrale zerlegt; man erhält dann

$$M = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{c^3 - a^3}{c} + 2\pi(b^2 - c^2), \quad a < c < b.$$

24. Die vorige Aufgabe werde dahin verallgemeinert, dass man die im Punkte P stattfindende Dichtigkeit gleich einer beliebigen Funktion von CP setzt; für $CP = u$ findet man

$$M = \frac{2\pi}{c}\int_a^b r\,dr\int_{r-c}^{r+c} u f(u)\,du, \qquad c < a < b,$$

$$M = \frac{2\pi}{c}\int_a^b r\,dr\int_{c-r}^{c+r} u f(u)\,du, \qquad c > b > a,$$

$$M = \frac{2\pi}{c}\left\{\int_a^c r\,dr\int_{c-r}^{c+r} u f(u)\,du + \int_c^b r\,dr\int_{r-c}^{r+c} u f(u)\,du\right\}, \quad a < c < b.$$

Die noch übrigen Doppelintegrale lassen sich ganz allgemein auf einfache Integrale zurückführen, wenn man erst

$$\int u f(u)\,du = F(u)$$

setzt, nachher die partielle Integration benutzt und schliesslich $F'(u) = u f(u)$ restituiert; dies giebt

$$M = \frac{\pi}{c}\left\{b^2 \int\limits_{b-c}^{b+c} u f(u)\, du - a^2 \int\limits_{a-c}^{a+c} u f(u)\, du \right.$$

$$\left. - \int\limits_a^b [(r+c) f(r+c) - (r-c) f(r-c)] r^2 dr \right\}, \quad c < a < b$$

$$M = \frac{\pi}{c}\left\{b^2 \int\limits_{c-b}^{c+b} u f(u)\, du - a^2 \int\limits_{c-a}^{c+a} u f(u)\, du \right.$$

$$\left. - \int\limits_a^b [(c+r) f(c+r) + (c-r) f(c-r)] r^2 dr \right\}, \quad c > b > a,$$

$$M = \frac{\pi}{c}\left\{b^2 \int\limits_{b-c}^{b+c} u f(u)\, du - \int\limits_a^c [(c+r) f(c+r) + (c-r) f(c-r)] r^2 dr \right.$$

$$\left. - a^2 \int\limits_{c-a}^{c+a} u f(u)\, du - \int\limits_c^b [(r+c) f(r+c) - (r-c) f(r-c)] r^2 dr \right\}, \; a < c < b.$$

25. Unter dem **Potential** eines gegebenen Körpers in Beziehung auf einen bestimmten Punkt versteht man denjenigen Ausdruck, der entsteht, wenn jedes Massenelement durch seinen Abstand von jenem Punkte dividiert und die Summe aller derartigen Quotienten gebildet wird. Bezeichnen x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines im Innern des Körpers liegenden Punktes, $f(x, y, z)$ die an derselben Stelle vorhandene Dichtigkeit, endlich α, β, γ die gleichfalls rechtwinkligen Koordinaten des gegebenen Punktes, so ist

$$P = \int\int\int \frac{f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}}$$

das Potential eines Körpers in Beziehung auf den Punkt $\alpha\beta\gamma$, vorausgesetzt, dass der Punkt xyz die Grenzflächen des Körpers nicht überschreitet. Die in der Aufgabe 23 angegebenen Werte für M sind hiernach die Werte des Potentials einer homogenen, die Dichtigkeit 1 besitzenden Kugelschale in Beziehung auf einen um c von ihrem Mittelpunkte entfernten Punkt C.

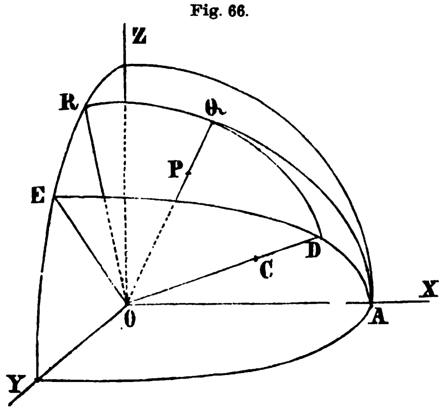
Um dieselbe Aufgabe allgemeiner zu behandeln, sind die in obiger Formel angedeuteten Integrationen auf alle positiven und negativen, der Bedingung

$$a^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq b^2$$

genügenden x, y, z auszudehnen; diese Operation wird durch Polarkoordinaten wesentlich erleichtert.

Nimmt man die x-Achse zur Polarachse (Fig. 66), $OP = r$, $\angle POX = \varphi$ und bezeichnet mit ψ den Winkel ROY, den die Ebene der Winkels φ mit der xy-Ebene bildet, so ist einerseits

Fig. 66.



$$x = r \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\varphi \cos\psi,$$
$$z = r \sin\varphi \sin\psi;$$

dem analog sei c der Radiusvektor des Punktes $\alpha\beta\gamma$ oder C, $\angle COX = \lambda$, $\angle EOY = \mu$, mithin

$$\alpha = c \cos\lambda,$$
$$\beta = c \sin\lambda \cos\mu,$$
$$\gamma = c \sin\lambda \sin\mu,$$

für den Winkel COP, welcher τ heissen möge, ergiebt sich dann

$$\cos\tau = \cos\lambda \cos\varphi + \sin\lambda \sin\varphi \cos(\psi - \mu),$$

und für das Potential

$$P = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{c^2 - 2cr\cos\tau + r^2}} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi;$$

hier sind noch die Werte von x, y, z, τ einzusetzen, was der Kürze wegen unterlassen wurde.

Von den zusammengehörigen Koordinatensystemen x, y, z und r, φ, ψ gehe man nun zu zwei neuen Systemen x_1, y_1, z_1 und r, τ, ω über, worin die feste Gerade $OC = c$ die Polarachse und die Ebene EOX des Winkels λ die Ebene $x_1 y_1$ ist. Nennt man A, D, Q die Punkte, in welchen die ursprüngliche x-Achse und die Vektoren c, r die eine Begrenzungsfläche der Kugelschale schneiden, so entsteht ein sphärisches Dreieck, worin $\angle DAQ = \psi - \mu$, die Seite $AD = \lambda$ und die Seite $AQ = \varphi$ ist; dem Winkel φ im

früheren Polarsysteme entspricht im neuen Systeme die Seite $DQ = \tau$ und dem Winkel ψ der Winkel $EDQ = \omega = 180^0 - \angle ADQ$. Es gelten nun die sphärisch-trigonometrischen Formeln

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cos\tau - \sin\lambda\sin\tau\cos\omega,$$
$$\sin\varphi\cos(\psi - \mu) = \sin\lambda\cos\tau + \cos\lambda\sin\tau\cos\omega,$$
$$\sin\varphi\sin(\psi - \mu) = \sin\tau\sin\omega;$$

entwickelt man aus den letzten die Werte von $\sin\varphi\cos\psi$ und $\sin\varphi\sin\psi$ und multipliziert nachher mit dem Radiusvektor r, der beiden Polarsystemen gemeinschaftlich angehört, so erhält man

$$x = r(\cos\lambda\cos\tau - \sin\lambda\sin\tau\cos\omega),$$
$$y = r[\sin\lambda\cos\mu\cos\tau + (\cos\lambda\cos\mu\cos\omega - \sin\mu\sin\omega)\sin\tau],$$
$$z = r[\sin\lambda\sin\mu\cos\tau + (\cos\lambda\sin\mu\cos\omega + \cos\mu\sin\omega)\sin\tau],$$

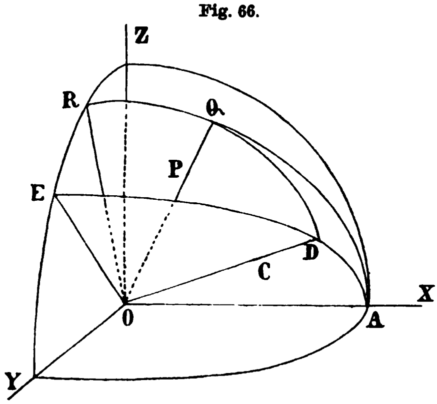
oder, wenn λ und μ durch α, β, γ, c ausgedrückt werden,

$$x = \frac{r}{c}(\alpha\cos\tau - \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}\,.\sin\tau\cos\omega),$$
$$y = \frac{r}{c}\left(\beta\cos\tau + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\sin\tau\cos\omega - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\sin\tau\sin\omega\right),$$
$$z = \frac{r}{c}\left(\gamma\cos\tau + \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\sin\tau\cos\omega + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\sin\tau\sin\omega\right).$$

Das neue Volumenelement ist $r^2\sin\tau\,dr\,d\tau\,d\omega$, die Integrationsgrenzen bleiben für r, τ, ω die nämlichen wie für r, φ, ψ und so ist

$$P = \int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{f(x, y, z)\,r^2\sin\tau}{\sqrt{c^2 - 2cr\cos\tau + r^2}}\,dr\,d\tau\,d\omega,$$

Fig. 66.



worin noch die vorigen Werte von x, y, z einzusetzen sind. Hiernach findet man leicht die folgenden Werte des Potentials.

a) Wenn die Substanz aus unendlich dünnen parallelen ebenen Schichten besteht und die Dichtigkeit

$$\Delta = Ax + By + Cz$$

ist, so gelten die drei Formeln

$$P = \tfrac{2}{3}\pi(b^2 - a^2)(A\alpha + B\beta + C\gamma), \qquad c < a < b,$$

$$P = \frac{4\pi}{15} \cdot \frac{(b^5 - a^5)(A\alpha + B\beta + C\gamma)}{c^3}, \qquad c > b > a,$$

$$P = \frac{2\pi}{15}\left(5b^2 - 3c^2 - 2\frac{a^5}{c^3}\right)(A\alpha + B\beta + C\gamma), \quad a < c < b.$$

b) Wenn die Substanz aus unendlich dünnen konzentrischen Kugelschichten besteht und

$$\varDelta = (\alpha_1 - x)^2 + (\beta_1 - y)^2 + (\gamma_1 - z)^2$$

ist, so ergeben sich durch Einführung der abkürzenden Zeichen

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = G, \quad \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma = H$$

die folgenden Werte des Potentials

$$P = \tfrac{1}{3}\pi(b^2 - a^2)[6G - 4H + 3(a^2 + b^2)], \qquad c < a < b,$$

$$P = \frac{4\pi}{15}\left\{\frac{5(b^3 - a^3)G}{c} - \frac{(b^5 - a^5)(2H - 3c^2)}{c^3}\right\}, \qquad c < b < a,$$

$$P = \frac{\pi}{15}\left\{10\left(3b^2 - c^2 - 2\frac{a^3}{c}\right)G - 4\left(5b^2 - 3c^2 - 2\frac{a^5}{c^3}\right)H\right.$$
$$\left. + 3\left(5b^4 - c^4 - 4\frac{a^5}{c}\right)\right\}, \qquad a < c < b.$$

Kapitel VIII.

Mittelwerte und Näherungsformeln für gegebene Funktionen.

§ 36.

Einfachste Fälle der Bestimmung von Mittelwerten.

1. Wenn x das Intervall x_0 bis X durchläuft und die Differenz $X - x_0$ in n gleiche Teile zerlegt wird, wobei

$$\frac{X - x_0}{n} = \varDelta x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n} = \frac{\varDelta x}{X - x_0}$$

sein möge, so ist der Ausdruck

$$\frac{1}{n}\{f(x_0) + f(x_0 + \varDelta x) + f(x_0 + 2\varDelta x) + \cdots + f(x_0 + [n-1]\varDelta x)\}$$

das arithmetische Mittel der Werte, die $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles erhält, vorausgesetzt, dass x jedesmal um das endliche Inkrement $\varDelta x$ zunimmt. Um hieraus das arithmetische Mittel aller zwischen x_0 und X möglichen Funktionswerte herzuleiten, muss man n unendlich wachsen, mithin $\varDelta x$ unendlich abnehmen lassen, und den Grenzwert aufsuchen, gegen den der vorige Mittelwert konvergiert. Nun ist zufolge des Wertes von $\frac{1}{n}$ das vorige arithmetische Mittel

$$= \frac{\Sigma f(x)\,\varDelta x}{X - x_0}, \quad x = x_0, \; x_0 + \varDelta x, \; x_0 + 2\varDelta x, \; \ldots X - \varDelta x,$$

mithin der gesuchte Mittelwert

$$\mu = \frac{\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{X - x_0} \quad \text{oder} \quad (X - x_0)\,\mu = \int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Denkt man sich $y = f(x)$ als Gleichung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten, so liegt hierin der Satz: das arithmetische

Mittel aller auf einer gegebenen Strecke errichteten Ordinaten ist die Höhe desjenigen Rechtecks, welches jene Strecke zur Basis und dieselbe Fläche hat wie das über dieser Strecke stehende Kurvenstück.

Hiernach kommt die Bestimmung des Mittelwertes jeder Funktion einer Variabeln auf eine Quadratur zurück. So ist z. B. in der Parabel $y = \alpha x^2$ der Mittelwert aller von $x = 0$ bis $x = X$ vorhandenen Ordinaten gleich dem Drittel der letzten Ordinate.

2. Wenn es sich um den Mittelwert einer Funktion zweier Variabeln handelt, so muss den letzteren ein gewisser Spielraum angewiesen sein, den man sich geometrisch als eine in der Ebene xy konstruierte, irgendwie begrenzte Fläche denken kann. Die Fläche U derselben teile man in n Rechtecke, von denen eines $\Delta x \Delta y$ sein möge, und errichte in jedem Endpunkte aller dieser Rechtecke Senkrechte, von denen $z = f(x, y)$ diejenige sein möge, welche im Punkte xy errichtet ist; wegen $n \Delta x \Delta y = U$ hat man

$$\mu = Lim \frac{\Sigma f(x, y)}{n} = Lim \frac{\Sigma f(x, y) \Delta x \Delta y}{U},$$

das ist

$$U\mu = \int\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

wobei die Integrationsgrenzen für x und y durch die Begrenzung des für x und y gegebenen Spielraums bestimmt werden. Denkt man sich $z = f(x, y)$ als Gleichung einer Fläche, so ist das arithmetische Mittel aller über einer gegebenen Basis stehenden z gleich der Höhe des Cylinders, der dieselbe Basis und dasselbe Volumen hat wie der von der Fläche begrenzte Cylinder.

Nimmt man z. B.

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2$$

und als Spielraum für x und y das rechtwinklige Dreieck, welches die Gerade

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

mit den positiven Teilen der Koordinatenachsen begrenzt, so ist $U = \frac{1}{2} ab$,

$$V = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{12} ab\, (\alpha a^2 + \beta b^2),$$

mithin

$$\mu = \frac{1}{6} (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

3. Es sei drittens der Mittelwert einer Funktion dreier Variabeln $f(x, y, z)$ zu bestimmen. Hier muss zunächst für x, y, z ein Spielraum gegeben sein, den man sich geometrisch als einen begrenzten Körperraum denken kann, dessen Volumen V heissen möge; durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung findet sich

$$V\mu = \int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

wobei die Integrationsgrenzen für x, y, z durch die Begrenzung des für x, y, z gegebenen Spielraums bestimmt werden. Denkt man sich $f(x, y, z)$ als die im Punkte xyz vorhandene Dichtigkeit, so ist der Mittelwert μ nichts anderes als die mittlere Dichtigkeit des gegebenen Körpers.

Als Beispiel diene der Fall

$$f(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2,$$

wobei als Spielraum für x, y, z das Tetraeder genommen werden möge, welches die Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

mit den positiven Teilen der Koordinatenebenen bildet; hier ist

$$\tfrac{1}{6} abc \cdot \mu = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

das heisst

$$\mu = \tfrac{1}{10}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2).$$

§ 37.

Die mittleren Radien von Kurven, Flächen und Körperräumen.

I. Ein bestimmter Bogen AB einer gegebenen Kurve sei in n gleiche Teile geteilt und jeder Teilpunkt mit einem festen Punkte C geradlinig verbunden worden; bildet man aus den so entstandenen n Strahlen $r_0, r_1, \dots r_{n-1}$ das arithmetische Mittel und lässt nachher n ins Unendliche wachsen, so giebt der Ausdruck

$$\varrho = Lim \frac{\Sigma r}{n}$$

die mittlere Entfernung des Kurvenbogens AB von dem festen Punkte C oder den mittleren Radiusvektor von AB, falls C als Pol eines Polarkoordinatensystems betrachtet wird. Ist P irgend ein Punkt des Bogens AB, $CP = r$, ferner K ein fester Punkt der Kurve, $arc\,KP = s$ und dem analog $arc\,KA = s_0$, $arc\,KB = S$, endlich $\varDelta s$ der n^{te} Teil des Bogens AB, so findet man

$$(S - s_0)\,\varrho = \int_{s_0}^{S} r\,ds,$$

oder, wenn eine feste Gerade CX als x-Achse eines rechtwinkligen, sowie als Achse eines Polarkoordinatensystems genommen wird,

$$(S - s_0)\varrho = \int_{x_0}^{X} \sqrt{(x^2 + y^2)(1 + y'^2)}\,.\,dx = \int_{\theta_0}^{\Theta} r\sqrt{r^2 + r'^2}\,.\,d\theta.$$

Beispiele. 1. Die Linie AB sei eine Gerade, und es werde die von C auf AB oder deren Verlängerung gefällte Senkrechte $CD = h$ zur Polarachse genommen; durch Einführung von $CA = a$, $CB = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$ ergiebt sich dann

$$\varrho = \frac{1}{2c}\left\{bb' - aa' + h^2 l\left(\frac{b + b'}{a + a'}\right)\right\}, \qquad b > a.$$

Im speziellen Falle $h = 0$ wird $a' = a$, $b' = b$, $c = b - a$ und $\varrho = \frac{1}{2}(a + b)$, wie zu erwarten war.

2. Die Kurve AB sei ein mit dem Radius a um den Mittelpunkt O beschriebener Kreis und $OC = c$. Hier ist es vorteilhaft, den Centriwinkel ω in Rechnung zu bringen, also

$$r = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\omega}, \quad ds = a\,d\omega$$

zu setzen; für $\omega = \pi - 2\varphi$ ergiebt sich dann

$$\varrho = \frac{P}{2\pi},$$

wo P den Umfang einer aus den Halbachsen $a + c$ und $a - c$ konstruierten Ellipse bedeutet. Dasselbe Resultat gilt auch für $a = c$, sowie für $a > c$, wenn die kleine Halbachse der Ellipse $= c - a$ genommen wird.

3. Sucht man die mittlere Entfernung einer Ellipse von einem ihrer Brennpunkte, so ist es zweckmässig,

$$x = a\cos\omega, \quad y = b\sin\omega, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = c,$$

mithin

$$r = a - c\cos\omega, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega} \, . \, d\omega$$

zu substituieren; dies giebt, wenn S den Umfang der gegebenen Ellipse bezeichnet,

$$S\varrho = a\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega} \, . \, d\omega, \quad \text{d. h. } \varrho = a.$$

4. Für die mittlere Entfernung der **Ellipse** von ihrem **Mittelpunkte** gilt nach der vorigen Bezeichnung

$$S\varrho = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega)(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)} \, . \, d\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \sin^2\omega \cos^2\omega + a^2 b^2} \, . \, d\omega.$$

Durch Einführung von $2\omega = \varphi$ ergiebt sich hieraus

$$\varrho = \frac{aP}{S},$$

wobei P den Umfang einer aus den Halbachsen

$$\tfrac{1}{2}\left(a + \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{und} \quad b$$

konstruierten Ellipse bezeichnet.

II. In der Ebene xy sei eine geschlossene Figur gezeichnet, deren Flächeninhalt U heissen möge; diese ist durch äquidistante Parallelen zu den Koordinatenachsen in n Felder geteilt, deren jedes den Inhalt $\Delta x \Delta y$ besitzt, wobei $n \Delta x \Delta y = U$ sein muss. Zieht man von jeder Ecke eines solchen Feldes eine Gerade nach einem festen Punkte C, den man zum Koordinatenanfang nimmt, so erhält man für $n = \infty$ die mittlere Entfernung ϱ_1 der Fläche U vom Punkte c; es ist

$$U\varrho_1 = \int\int \sqrt{x^2 + y^2} \, . \, dx\, dy,$$

wobei die Fläche U den Integrationsbereich für die Variabeln x und y bildet. In Polarkoordinaten hat man

$$U\varrho_1 = \int_{\theta_0}^{\Theta}\int_{r_0}^{R} r^2 d\theta\, dr,$$

oder einfacher

$$U\varrho_1 = \frac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\Theta}(R^3 - r_0^3)\,d\theta.$$

Beispiele. 1. Für eine Dreieckfläche ABC erhält man bei derselben Bezeichnung wie im Beispiel 1 in I

$$\varrho_1 = \frac{2}{3}\varrho.$$

2. Für eine Kreisfläche ist bei derselben Bezeichnung wie in I Nr. 2

$$R = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\omega}, \quad r_0 = 0, \quad \tan\theta = \frac{a\sin\omega}{a\cos\omega - c},$$

mithin

$$3\pi a\varrho_1 = \int^{2\pi}(a - c\cos\omega)\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\omega}\,.\,d\omega,$$

und für $\omega = \pi - 2\varphi$

$$3\pi a\varrho_1 = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[(a + c)\cos^2\varphi + (a - c)\sin^2\varphi]\,p\,d\varphi,$$

$$p = \sqrt{(a + c)^2\cos^2\varphi + (a - c)^2\sin^2\varphi}.$$

Durch Differentiation überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Integralformel

$$\int(\alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi)\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\left\{(\alpha - \beta)\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}\right.$$

$$+ \frac{2(\alpha^2 + \beta^2) + 3\alpha\beta}{\alpha + \beta}\int\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

$$\left. - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha + \beta}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}}\right\};$$

diese lässt sich so anwenden, dass man im Falle $c < a$

$$\alpha = a + c, \quad \beta = a - c,$$

dagegen im Falle $c > a$

$$\alpha = c + a, \quad \beta = c - a$$

nimmt. Setzt man noch zur Abkürzung

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(a + c)^2\cos^2\varphi + (a - c)^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = P,$$

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(a+c)^2 cos^2\varphi+(a-c)^2 sin^2\varphi}}=Q,$$

so erhält man

$$\varrho_1=\frac{(7a^2+c^2)P-(a^2-c^2)^2 Q}{18\pi a^2}, \qquad c<a,$$

$$\varrho_1=\frac{(7c^2+a^2)P-(c^2-a^2)^2 Q}{18\pi ac}, \qquad c>a.$$

Für $c=0$ giebt die erste Formel $\varrho_1=\frac{2}{3}a$; für $c=a$ geben beide Formeln $\varrho_1=\frac{32}{9\pi}a$.

3. Die mittlere Entfernung der Ellipsenfläche von einem ihrer Brennpunkte ist

$$\varrho_1=a-\frac{1}{3}\frac{b^2}{a}.$$

4. Die mittlere Entfernung der Ellipsenfläche von ihrem Centrum erhält man mittels einer schon früher benutzten Reduktionsformel; sie ist

$$\varrho_1=\frac{S}{3\pi},$$

wo S den Umfang der gegebenen Ellipse bedeutet.

III. Auf einer Fläche sei durch eine geschlossene Figur ein Stück begrenzt, dessen Inhalt Ω heissen möge, und jenes Flächenstück sei durch Ebenen, die teils der xz-, teils der yz-Ebene parallel sind, in n gleiche Felder zerlegt, von denen jedes den Inhalt σ haben soll; man sucht die mittlere Entfernung des Flächenstücks Ω von einem Punkte C, der auf der z-Achse in der Entfernung $OC=c$ liegt. Bei unendlich wachsenden n ist

$$\frac{1}{n}=\frac{\sigma}{\Omega}=\frac{1}{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dx\,dy,$$

daher

$$\Omega\varrho_2=\int\!\!\int\sqrt{\left[x^2+y^2+(z-c)^2\right]\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]}\cdot dx\,dy,$$

wobei die Horizontalprojektion von Ω den Integrationsbereich für x und y bestimmt.

In Polarkoordinaten ist, wenn die z-Achse zur Polarachse genommen wird,

$$\Omega \varrho_2 =$$

$$\int\int \sqrt{(c^2 - 2cr\sin\psi + r^2)\left\{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2\right\}} \cdot r\,d\omega\,d\psi.$$

Beispiel. Für eine mit dem Radius a beschriebene Kugelfläche hat man wegen $r = a$

$$4\pi\varrho_2 = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{c^2 - 2ca\sin\psi + a^2} \cdot \cos\psi\,d\omega\,d\psi,$$

und hieraus

$$\varrho_2 = a + \tfrac{1}{3}\frac{c^2}{a}, \quad \text{wenn } c < a,$$

$$\varrho_2 = c + \tfrac{1}{3}\frac{a^2}{c}, \quad \text{wenn } c > a.$$

Im Falle $c = a$ geben beide Formeln $\varrho_2 = \frac{4}{3}a$.

IV. Es sei ein allseitig begrenzter Körper vom Inhalt V gegeben; man sucht die mittlere Entfernung desselben von einem Punkte C, der auf der z-Achse in der Höhe $OC = c$ liegt.

Nach den mehrfach benutzten Prinzipien findet man

$$V\varrho_3 = \int\int\int \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2} \cdot dx\,dy\,dz,$$

wobei sich die Integrationen auf alle x, y, z beziehen, für die der Punkt xyz die Grenzen des gegebenen Körpers nicht überschreitet. In Polarkoordinaten ist, wenn die z-Achse zur Polarachse genommen wird,

$$V\varrho_3 = \int\int\int \sqrt{c^2 - 2cr\sin\psi + r^2} \cdot r^2\cos\psi\,d\omega\,d\psi\,dr.$$

Beispiele. 1. Der Körper sei eine mit dem Radius a beschriebene Kugel; es ist dann

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3\varrho_3 = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^a \sqrt{c^2 - 2cr\sin\psi + r^2} \cdot r^2\cos\psi\,d\omega\,d\psi\,dr.$$

Integriert man in der Reihenfolge ω, ψ, r, so erhält man

$$\varrho_3 = \frac{1}{a^3 c}\int_0^a \frac{\sqrt{(c^2 + 2cr + r^2)^3} - \sqrt{(c^2 - 2cr + r^2)^3}}{2}\,r\,dr.$$

Im Falle $c < a$ muss das Integral in zwei, von 0 bis c und von c bis a gehende Integrale zerlegt werden; im Falle $c > a$ ist dies nicht nötig. Man erhält

$$\varrho_3 = \tfrac{3}{4} a + \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{a} - \tfrac{1}{20} \frac{c^4}{a^3}, \quad \text{wenn } c < a,$$

$$\varrho_3 = c + \tfrac{1}{5} \frac{a^2}{c}, \quad \text{wenn } c > a.$$

für $c = a$ liefern beide Formeln $\varrho_3 = \frac{6}{5} a$.

2. Der gegebene Körper sei ein dreiachsiges **Ellipsoid** und es werde der mittlere Abstand seines Volumens vom Mittelpunkte des Körpers gesucht.

In rechtwinkligen Koordinaten ist

$$V\varrho_3 = \int\!\!\int\!\!\int \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot dx\, dy\, dz,$$

wobei sich die Integrationen auf alle positiven und negativen, der Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqq 1$$

genügenden x, y, z erstrecken. Nimmt man die x-Achse zur Polarachse und setzt

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta \cos\chi, \quad z = r \sin\theta \sin\chi,$$

$$R^2 = \frac{1}{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta\cos\chi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta\sin\chi}{c}\right)^2},$$

so erhält man zunächst

$$V\varrho_3 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3 \sin\theta\, d\theta\, d\chi\, dr,$$

ferner, wenn nach Ausführung der auf r und χ bezüglichen Integrationen

$$\cos\theta = u, \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \beta, \quad \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \gamma, \quad a > b > c$$

gesetzt wird

$$V\varrho_3 = \tfrac{1}{2}\pi a^2 b c \int_0^1 \left\{ \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 u^2} + \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1 - \beta^2 u^2)(1 - \gamma^2 u^2)}}.$$

Hierin liegt folgender Satz: Bezeichnet Ω die Oberfläche eines aus den Halbachsen a, $\frac{ac}{b}$, c konstruierten Ellipsoids, so ist

$$V\varrho_3 = \tfrac{1}{4} b^2 \Omega \quad \text{oder} \quad \varrho_3 = \frac{3}{16\pi} \cdot \frac{b\Omega}{ac}.$$

Für $b = c$ wird das erste Ellipsoid ein gestrecktes, das zweite ein abgeplattetes Sphäroid; für $b = a$ ist das erste ein abgeplattetes, das zweite ein gestrecktes. In beiden Fällen lässt sich die noch übrige Integration leicht ausführen.

§ 38.

Die näherungsweise Darstellung von Funktionen einer Variabeln.

Man kann verlangen, dass die gegebene Funktion $f(x)$ durch die gegebenen Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_{n-1}(x)$ und die unbekannten numerischen Koeffizienten c_0, c_1, ... c_{n-1} so ausgedrückt werden soll, dass innerhalb des Intervalls von $x = x_0$ bis $x = X$ die Gleichung

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

wenn auch nicht vollkommen genau, aber doch mit möglichster Genauigkeit stattfinde. Geometrisch heisst dies, man soll an Stelle einer gegebenen Kurve eine andere Kurve setzen, die der ersten innerhalb einer gegebenen Strecke möglichst nahe liegt, wobei die c in der Gleichung der zweiten Kurve vorkommende Parameter, über die verfügt werden kann, bedeuten.

Da die Ausdrücke „möglichste Genauigkeit", „möglichst nahe liegen" keine bestimmten mathematischen Begriffe sind, so muss man sie erst durch eine Bedingung festlegen; als solche mag die Bestimmung dienen, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum werden soll (Methode der kleinsten Quadrate). Dann muss auch das arithmetische Mittel der Fehlerquadrate, also nach § 36 Nr. 1

$$M = \frac{1}{X - x_0}\int_{x_0}^{X} [f(x) - c_0\varphi_0(x) - c_1\varphi_1(x) - \cdots - c_{n-1}\varphi_{n-1}(x)]^2 dx$$

ein Minimum werden.

Daraus ergeben sich, wenn

$$\int_{x_0}^{X} \varphi_h(x)\,\varphi_k(x)\,dx = P_{h,k}, \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = Q_k$$

gesetzt werden, die n Bestimmungsgleichungen für die c:

$$c_0 P_{0,k} + c_1 P_{1,k} + \cdots + c_{n-1} P_{n-1,k} = Q_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Soll insbesondere $f(x)$ in dem Intervalle von 0 bis a durch eine endliche Potenzreihe ausgedrückt werden, also

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

sein, so heissen die n Bestimmungsgleichungen für die c:

$$\frac{1}{k+1} c_0 + \frac{a}{k+2} c_1 + \frac{a^2}{k+3} c_2 + \cdots + \frac{a^{n-1}}{k+n} c_{n-1} = a^{-k-1} \int_0^a x^k f(x)\,dx,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Setzt man die für die c gefundenen Werte in M ein, so ist $m = \sqrt{M}$ der mittlere Fehler.

Beispiele. 1. Wenn innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = 1$ die Gleichung

$$\sqrt{x} = c_0 + c_1 x$$

bestehen, d. h. ein Parabelbogen durch eine Gerade ersetzt werden soll, so gehen die vorigen Gleichungen über in

$$c_0 + \tfrac{1}{2} c_1 = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{1}{2} c_0 + \tfrac{1}{3} c_1 = \tfrac{2}{5},$$

und hieraus folgt

$$\sqrt{x} = \tfrac{4}{15} + \tfrac{4}{5} x.$$

Der mittlere Fehler ist $\sqrt{\frac{1}{450}} = 0{,}06708$.

2. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergiebt sich

$$\sqrt{1 + x^2} = 0{,}93432 + 0{,}42695 \,.\, x, \quad 1 > x > 0.$$

Der mittlere Fehler beträgt 0,02569.

Setzt man $x = \frac{v}{u}$ und multipliziert mit u, so entsteht noch

$$\sqrt{u^2 + v^2} = 0{,}93432 \,.\, u + 0{,}42695 \,.\, v, \quad u > v > 0.$$

3. Dasselbe Verfahren liefert

$$x = 0{,}83155 \,.\, \sin x + 0{,}69380 \,.\, (1 - \cos x), \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Es möge hier angemerkt werden, dass solche Näherungsgleichungen ähnlich wie in Tl. I, § 42 zur näherungsweisen Auflösung transcendenter Gleichungen verwendbar sind. Soll z. B. ω aus der Gleichung

$$\omega - \varepsilon \sin \omega = \tau$$

bestimmt werden, worin ε und τ gegebene Grössen bedeuten, so kann man, falls ω voraussichtlich zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muss, die gegebene Gleichung durch folgende ersetzen

$$c_0 \sin \omega + c_1(1 - \cos \omega) - \varepsilon \sin \omega = \tau,$$

in welcher c_0 und c_1 die obigen Werte besitzen. Die Auflösung der vorstehenden Gleichung geschieht durch Einführung eines Hilfswinkels ϑ, und besteht in den beiden Formeln

$$\tan \vartheta = \frac{c_0 - \varepsilon}{c_1} = 1{,}19854 - 1{,}44134 \,.\, \varepsilon,$$

$$\cos(\omega + \vartheta) = \frac{c_1 - \tau}{c_1} \cos \vartheta = (1 - 1{,}44134 \,.\, \tau) \cos \vartheta.$$

4. Aus den allgemeinen Formeln ergiebt sich

$$x^3 = \tfrac{1}{20} - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{2}x^2, \quad 0 < x < 1;$$

wobei der mittlere Fehler $\sqrt{\frac{1}{2800}} = 0{,}01673$ ist.

Dieser angenäherte Ausdruck für x^3 könnte zur näherungsweisen Auflösung einer kubischen Gleichung Verwendung finden.

5. Von Interesse ist der Fall

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \quad 0 < x < 1,$$

wo das Integral die Quadrantenlänge einer aus den Halbachsen 1 und $x < 1$ konstruierten Ellipse bedeutet. Die Integrale P haben hier dieselben Werte wie in der vorigen Aufgabe; die Werte der Q ergeben sich aus der in § 33 Nr. 8 entwickelten Formel, wenn man $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ und λ der Reihe nach $= \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ setzt, nämlich

$$Q_0 = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi} \cdot dx\, d\varphi = \frac{\pi^2}{8},$$

$$Q_1 = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\sqrt{\cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi} \,.\, dx\, d\varphi = \frac{2}{3},$$

$$Q_2 = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\sqrt{\cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi} \cdot dx\, d\varphi = \frac{3\pi^2}{64}.$$

Diese Werte liefern

$$c_0 = \tfrac{81}{32}\pi^2 - 24, \quad c_1 = 128 - \tfrac{207}{16}\pi^2, \quad c_2 = \tfrac{195}{16}\pi^2 - 120.$$

Setzt man noch $x = \frac{b}{a}$, multipliziert beiderseits mit a und bezeichnet mit $E(a, b)$ den Viertelumfang einer aus den Halbachsen a und b konstruierten Ellipse, so hat man die Näherungsformel

$$E(a, b) = 0{,}98244 \,.\, a + 0{,}31199 \,.\, b + 0{,}28580 \cdot \frac{b^2}{a}.$$

Die Länge des Quadranten der Ellipse $x^2 + \frac{4}{8}y^2 = 1$ wäre hiernach angenähert: 1,46698 (vgl. § 26 Nr. 7).

§ 39.

Die näherungsweise Darstellung von Funktionen zweier Variabeln.

Analog dem Vorigen kann man die n Koeffizienten c so bestimmen, dass die Gleichung

$$f(x, y) = c_0 \varphi_0(x, y) + c_1 \varphi_1(x, y) + \cdots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(x, y)$$

innerhalb eines gegebenen Spielraums so genau als möglich stattfinde. Geometrisch bedeutet dies, dass man eine gegebene Fläche durch eine andere Fläche ersetzen will, die der ersten innerhalb eines bestimmten Spielraumes möglichst nahe liegt; der erwähnte Spielraum ist dann eine in der xy-Ebene gezeichnete Fläche, deren Peripherie der Punkt xy nicht überschreiten darf.

Setzt man auch hier fest, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum werden soll, so ändert sich an den vorigen Formeln nur das eine, dass die P und Q zu Doppelintegralen werden, die sich auf den angegebenen Spielraum beziehen.

Beispiele. 1. Wenn unter der Bedingung $1 > x > y > 0$ die Gleichung

$$x^2 + y^2 = c_0 + c_1 x + c_2 y$$

stattfinden soll, so ergiebt sich

$$x^2 + y^2 = -\tfrac{2}{5} + \tfrac{6}{5}x + \tfrac{4}{5}y, \quad 1 > x > y > 0.$$

2. Wenn unter der Bedingung $1 > x > y > 0$ die Gleichung

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = c_0 + c_1 x + c_2 y$$

stattfinden soll, so erhalten die P die nämlichen Werte wie vorhin; ferner ist durch Einführung von Polarkoordinaten

$$Q_0 = \int_0^1\int_0^x \sqrt{1+x^2+y^2}\,.\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\int_0^{\sec\theta} \sqrt{1+r^2}\,.\,d\theta\,dr$$

$$= \tfrac{1}{3}\left\{\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{(1+\sec^2\theta)^3}\,.\,d\theta - \tfrac{1}{4}\pi\right\}.$$

Durch die weitere Substitution

$$\sin\theta = \sqrt{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\omega \quad \text{oder} \quad \cos\theta = \sqrt{\cos\omega}$$

wird hieraus

$$Q_0 = \tfrac{1}{3}\left\{\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\left(\frac{1+\cos\omega}{\cos\omega}\right)^2 d\omega - \tfrac{1}{4}\pi\right\},$$

oder, wenn $(1+\cos\omega)^2$ aufgelöst und jeder einzelne Summand integriert wird,

$$Q_0 = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + l\tan 75^0 - \frac{\pi}{12}\right\} = 0{,}6403946.$$

Um zweitens den Wert von

$$Q_1 = \int_0^1\int_0^x x\sqrt{1+x^2+y^2}\,.\,dx\,dy$$

zu finden, kehre man die Reihenfolge der Integrationen um; dies giebt

$$Q_1 = \int_0^1 dy\int_y^1 \sqrt{1+x^2+y^2}\,.\,x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\left\{\int_0^1 \sqrt{(2+y^2)^3}\,.\,dy - \int_0^1 \sqrt{(1+2y^2)^3}\,.\,dy\right\},$$

oder, wenn im ersten Integrale $y = t\sqrt{2}$, im zweiten $y = \frac{t}{\sqrt{2}}$ gesetzt wird,

$$Q_1 = \tfrac{1}{3}\left\{4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{(1+t^2)^3}\,.\,dt - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(1+t^2)^3}\,.\,dt\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{l(1+\sqrt{3})}{2} - \frac{l(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{8\sqrt{2}} - \frac{l2}{4} = 0{,}4444337.$$

Im letzten Integrale

$$Q_2 = \int_0^1 \int_0^x y\sqrt{1+x^2+y^2}\,.\,dx\,dy$$

lässt sich die auf y bezügliche Integration sofort ausführen, und es wird schliesslich

$$Q_2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{l(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{8\sqrt{2}} - \frac{l(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{7\sqrt{2}}{24} = 0{,}2281805.$$

So erhält man zuletzt, auf fünf Dezimalen abgekürzt,

$$\sqrt{1+x^2+y^2} = 0{,}86069 + 0{,}48702\,.\,x + 0{,}28626\,.\,y; \quad 1 > x > y > 0.$$

Kapitel IX.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 40.

Vollständige Differentiale. Integrierender Faktor.

I. Eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades lässt sich auf die Form bringen

$$1) \qquad \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0.$$

In dem einfachen Falle, dass φ nur x, ψ nur y enthält, also die Differentialgleichung

$$2) \qquad \varphi(x)\, dx + \psi(y)\, dy = 0$$

ist, sind die Variabeln gesondert, und das allgemeine Integral von 2) lautet

$$\int \varphi(x)\, dx + \int \psi(y)\, dy = C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet.

In dem allgemeinen Falle 1) ist das Integral sofort in der Form

$$f(x, y) = C,$$

anzugeben, wenn die linke Seite ein vollständiges Differential ist. Bezeichnet man die vorkommenden Funktionen kurz mit φ, ψ, f, so ist die Bedingung der Integrabilität, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

sein muss. Ergiebt sich dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist,

$$\int \varphi\, dx = u,$$

wobei sich die Integration nur auf x bezieht, so muss $\psi - \frac{\partial u}{\partial y}$ unabhängig von x, das Integral

$$\int \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$$

also eine Funktion von y allein sein und das allgemeine Integral von 1) ergiebt sich:

$$f(x,y) = u + \int\left(\psi - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy = C.$$

Bestimmt man erst das Integral u und ergiebt sich dann $\psi - \frac{\partial u}{\partial y}$ unabhängig von x, so ist damit ebenfalls der Nachweis geliefert, dass die linke Seite der Gleichung 1) ein vollständiges Differential ist.

Beispiele. 1. $(\alpha x + \beta y^2)\,dx + (2\beta xy + \gamma y^3)\,dy = 0.$
Hier ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\beta y = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

folglich

$$u = \int(\alpha x + \beta y^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\beta x y$$

und

$$\psi - \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma y^3, \quad \int\left(\psi - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \tfrac{1}{4}\gamma y^4;$$

man erhält also das allgemeine Integral

$$\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x y^2 + \tfrac{1}{4}\gamma y^4 = C.$$

2. $x(x^2 + y^2 - a^2)\,dx + y\,(x^2 + y^2 - b^2)\,dy = 0;$
dann ist

$$u = \int x(x^2 + y^2 - a^2)\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 - \tfrac{1}{2}a^2x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y,$$

folglich ist

$$\psi - \frac{\partial u}{\partial y} = y\,(y^2 - b^2)$$

unabhängig von x. Das allgemeine Integral kann in der Form geschrieben werden:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,(a^2x^2 + b^2y^2) = C.$$

3. Die Differentialgleichung

$$2\,(axe^{-y} - b)\,dx + (e^y - ax^2e^{-y})\,dy = 0$$

hat als Integral

$$ax^2e^{-y} + e^y - 2bx = C.$$

4. $$\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}-\frac{a}{x^2}\right)dx+\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}-\frac{b}{y^2}\right)dy=0$$

giebt als Integral

$$\tfrac{1}{2}l(x^2+y^2)+arctan\frac{y}{x}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=C.$$

5. $$\sqrt{1-y^2}\,.\,dx+\frac{1-xy}{\sqrt{1-y^2}}dy=0,$$

$$x\sqrt{1-y^2}+arcsin\,y=C.$$

6. $$(sin\,y-y\,sin\,x)\,dx+(x\,cos\,y+cos\,x-cot\,y)\,dy=0,$$

$$x\,sin\,y+y\,cos\,x-l\,sin\,y=C.$$

7. $$(1+x+\sqrt{x^2+y^2})\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{1}{y}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy\right]=0,$$

$$x+\sqrt{x^2+y^2}+l(x+\sqrt{x^2+y^2})=C.$$

8. $$\left(\frac{x\sqrt{x^2+y^2-1}-y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2-1}+x}{x^2+y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0,$$

$$arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+arctan\frac{y}{x}-l\left(\frac{y}{x}\right)=C,$$

9. $$\left(2x\,sin\frac{y}{x}-y\,cos\frac{y}{x}\right)dx+x\,cos\frac{y}{x}\,dy=0,$$

$$x^2\,sin\frac{y}{x}=C.$$

II. Ist die Integrabilitätsbedingung in I nicht erfüllt, die linke Seite der Differentialgleichung

$$\varphi\,dx+\psi\,dy=0$$

also kein vollständiges Differential, so giebt es doch immer eine Funktion v von x und y von der Beschaffenheit, dass

$$v(\varphi\,dx+\psi\,dy)$$

ein vollständiges Differential wird. Diese Funktion v heisst **integrierender Faktor**. So ist z. B. die linke Seite der Differentialgleichung

$$y\,dx-x\,dy=0$$

kein vollständiges Differential, sie wird aber ein solches durch Hinzufügung des Faktors $\frac{1}{y^2}$, und man erhält dann als Integral

$$\frac{x}{y}=C.$$

Man könnte aber auch $\frac{1}{xy}$ als integrierenden Faktor nehmen, wodurch die Variabeln gesondert würden; als Integral würde sich, wenn man die Form der willkürlichen Konstante änderte, dieselbe Gleichung ergeben.

Es giebt überhaupt unendlich viele integrierende Faktoren; denn wenn v ein solcher ist, durch dessen Hinzufügung sich das Integral der vorgelegten Differentialgleichung als

$$f = C$$

ergiebt, so ist auch $v \,.\, F(f)$ ein integrierender Faktor.

Die Bestimmung des integrierenden Faktors v würde die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial(v\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial(v\psi)}{\partial x}$$

erfordern, die im allgemeinen schwieriger ist als die der gegebenen Differentialgleichung. In manchen einfachen Fällen lässt sich ein integrierender Faktor auf andere Weise ermitteln.

a) In den einfachsten Fällen lässt sich durch geeignete Behandlung der gegebenen Differentialgleichung ein integrierender Faktor erraten.

Z. B. 1. Bringt man die Differentialgleichung

$$(x^m + y)\,dx - x\,dy = 0$$

auf die Form

$$x^m\,dx - (x\,dy - y\,dx) = 0,$$

so sieht man, dass ein integrierender Faktor $\frac{1}{x^2}$ ist; denn durch Hinzufügung desselben erhält man

$$x^{m-2}\,dx - \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

also als Integral

$$\frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{y}{x} = C.$$

2. $$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$$

kann man schreiben:

$$(x\,dx + y\,dy) + (y\,dx - x\,dy) = 0$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\,d(x^2 + y^2) + y^2\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Hier erkennt man als integrierenden Faktor $\frac{1}{x^2+y^2}$, wodurch man

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\frac{x^2}{y^2}}=0$$

erhält. Das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist also

$$\tfrac{1}{2}\,l\,(x^2+y^2)+arctan\,\frac{x}{y}=C.$$

3. $$(x^2+2xy-y^2)\,dx+(y^2+2xy-x^2)\,dy=0$$

kann man zunächst schreiben:

$$(2x^2+2xy-x^2-y^2)\,dx+(2y^2+2xy-x^2-y^2)\,dy=0,$$

und weiter:

$$(x+y)\,d\,(x^2+y^2)-(x^2+y^2)\,d(x+y)=0;$$

integrierende Faktoren sind dann:

$$\frac{1}{(x+y)^2}\quad \text{oder}\quad \frac{1}{(x+y)\,(x^2+y^2)}.$$

Das Integral ist

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=C.$$

4. $$(1+xy)\,y\,dx+(1-xy)\,x\,dy=0$$

kann man auf die Form bringen

$$xy\,.\,y^2d\left(\frac{x}{y}\right)+d(xy)=0,$$

in der man als integrierenden Faktor $\frac{1}{x^2y^2}$ erkennt und man erhält als Integral

$$l\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{xy}=C.$$

b) Wenn die Funktionen φ und ψ homogen sind, so ist unter der Voraussetzung

$$x\varphi+y\psi \gtrless 0$$

ein integrierender Faktor die Funktion

$$v=\frac{1}{x\varphi+y\psi}.$$

Z. B. 1. $$y^2dx+x(x+y)\,dy=0$$

hat den integrierenden Faktor

$$v = \frac{1}{xy(x+2y)};$$

das Integral ist dann nach I:

$$y\sqrt{\frac{x}{x+2y}} = C.$$

2. Die Differentialgleichung

$$3(x+y)\,dx + 2(2x+y)\,dy = 0$$

hat den integrierenden Faktor

$$v = \frac{1}{3x^2+7xy+2y^2} = \frac{1}{(3x+y)(x+2y)};$$

ihr Integral ergiebt sich:

$$(3x+y)^2(x+2y)^3 = C.$$

3. Die linke Seite der Differentialgleichung

$$(x^3+4x^2y-5xy^2-2y^3)\,dx - (2x^3-5x^2y-4xy^2+y^3)\,dy = 0$$

wird durch Hinzufügung des integrierenden Faktors

$$v = \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+2xy-y^2)}$$

ein vollständiges Differential und hat das Integral

$$\frac{x^2+2xy-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = C.$$

4. $$\left(nx\sin\frac{y}{x} + y\cos\frac{y}{x}\right)dx - x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$$

hat den integrierenden Faktor

$$v = \frac{1}{x^2\sin\frac{y}{x}}$$

und das Integral

$$\frac{x^n}{\sin\frac{y}{x}} = C.$$

c) Ergiebt sich

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = X$$

unabhängig von y, so ist ein integrierender Faktor v bestimmt durch

$$lv = \int X\,dx.$$

Z. B. 1. Ist die Differentialgleichung

$$(2y^2 + 3xy + 3x + 2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$$

gegeben, so findet man $X = \frac{1}{x}$, mithin $v = x$ und das Integral

$$x^3(1+y) + x^2(1+y^2) = C.$$

2. $$(5x^2 + 4xy^2 + 3y)\,dx + (2x^3y + x)\,dy = 0$$

ergiebt

$$X = \frac{2}{x}, \quad v = \frac{1}{x^2}$$

und als Integral

$$x^5 + x^4y^2 + x^3y = C.$$

3. Ist

$$(ax^2 - cy^2 + 2ax + by)\,dx + (bx^2 + 2cxy + bx + 2cy)\,dy = 0,$$

so hat man

$$X = -\frac{2}{1+x}, \quad v = \frac{1}{(1+x)^2}$$

und findet als Integral

$$\frac{ax^2 + bxy + cy^2}{1+x} = C.$$

4. $$(x^2 + y^2 + 2x - 2y)\,dx + 2(y-1)\,dy = 0;$$

hier ist

$$X = 1, \quad v = e^x,$$

also erhält man das Integral

$$(x^2 + y^2 - 2y)e^x = C.$$

d) Findet sich, dass

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = Y$$

unabhängig von x ist, so ergiebt sich ein integrierender Faktor v durch die Gleichung

$$lv = -\int Y\,dy.$$

Z. B. 1. Die Differentialgleichung

$$(xy + y^2)\,dx + (xy - 1)\,dy = 0$$

ergiebt

$$Y = \frac{1}{y}, \quad v = \frac{1}{y}$$

und damit das Integral:

$$x^2 + 2xy - 2ly = C.$$

2. $$\cos x \sin y\,dx + (\sin y - y\cos y - \sin x \cos y)\,dy = 0$$

giebt

$$Y = 2 \cot y, \quad v = \frac{1}{\sin^2 y},$$

also als Integral:

$$\frac{y + \sin x}{\sin y} = C.$$

3. Aus

$$2xy(1 + y^2)\,dx - (1 + x^2 + x^2y^2)\,dy = 0;$$

findet man

$$Y = \frac{2 + 4y^2}{y(1 + y^2)}, \quad v = \frac{1}{y^2(1 + y^2)},$$

so dass sich das Integral ergiebt:

$$\frac{1 + x^2}{y} + \arctan y = C.$$

4. $$y\,dx + (x - 1)(2y^2 + 1)\,dy = 0;$$

hier ist

$$Y = -2y, \quad v = e^{y^2},$$

womit man als Integral erhält:

$$(x - 1)\,y e^{y^2} = C.$$

§ 41.

Hauptformen der Differentialgleichung erster Ordnung.

I. Nach § 40, I ist die einfachste Form einer Differentialgleichung erster Ordnung diejenige, in der sich die Sonderung der Variabeln ausführen lässt.

Weniger einfache Formen lassen sich zuweilen auf diesen einfachsten Fall zurückführen, indem man durch Substitution neuer Variabeln eine Differentialgleichung herstellt, in der sich die Variabeln sondern lassen.

1. Wenn eine Differentialgleichung homogen, d. h. unter der Form

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

enthalten ist, so erhält man durch die Substitution

$$\frac{y}{x} = t, \quad \text{mithin } y = xt, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t,$$

eine Differentialgleichung zwischen x und t, in der sich die Variabeln sondern lassen. Es ergiebt sich

$$\int \frac{dt}{F(t)-t} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Nach Ausführung der Integration liefert die Restitution $t = \frac{y}{x}$ das gesuchte allgemeine Integral.

2. Dasselbe Verfahren passt auf die nichthomogene Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + f(x) \, . \, F\left(\frac{y}{x}\right),$$

und liefert

$$\int \frac{dt}{F(t)} = \int \frac{f(x)}{x} dx + C, \quad t = \frac{y}{x}.$$

3. Setzt man in der Differentialgleichung

$$y \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

$y^2 = z$, so wird die Gleichung homogen und lässt sich nachher mittels der Substitution $z = xt$ integrieren; dies giebt

$$\int \frac{dt}{2F(t) - t} = lx + C, \quad t = \frac{y^2}{x}.$$

4. In der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2 F(xy)$$

führt die Substitution $xy = u$ zur Sonderung der Variabeln, so dass entsteht

$$\int \frac{du}{u + u^2 F(u)} = lx + C, \quad u = xy.$$

5. Wendet man die vorige Substitution auch bei folgender Differentialgleichung an

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = f(x) \, . \, F(xy),$$

so erhält man

$$\int \frac{du}{F(u)} = \int x f(x) \, dx + C, \quad u = xy.$$

6. Substituiert man in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

$ax + by = z$, so giebt die Sonderung der Variabeln

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = x + C, \quad z = ax + by.$$

7. In der Differentialgleichung

$$x + y\frac{dy}{dx} = f(x) \,.\, F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

führt die Substitution $x^2 + y^2 = r^2$ zur Sonderung der Variabeln, und liefert schliesslich

$$\int \frac{r\,dr}{F(r)} = \int f(x)\,dx + C, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + P \,.\, y = Q,$$

worin P und Q Funktionen von x allein sind, lässt sich integrieren, wenn man für y das Produkt zweier Variabeln, also

$$y = uv$$

setzt, wodurch man erhält:

$$v\left(\frac{du}{dx} + P \,.\, u\right) + u\frac{dv}{dx} = Q.$$

Verfügt man über die Variabeln u und v so, dass

$$\frac{du}{dx} + P \,.\, u = 0,$$

also

$$u = e^{-\int P\,dx}$$

wird, so lässt sich die übrigbleibende Differentialgleichung nach Einsetzung des Wertes von u integrieren, und man erhält das allgemeine Integral:

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C + \int Q e^{\int P\,dx}\,dx\right).$$

Die Differentialgleichung lässt sich auch nach § 40 II, c) integrieren; schreibt man sie

$$(Py - Q)\,dx + dy = 0,$$

so findet sich

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = P,$$

also unabhängig von y; daher hat die Gleichung den integrierenden Faktor

$$v = e^{\int P\,dx},$$

womit sich dann das Integral in derselben Form ergiebt.

Auf die obige Form lässt sich auch die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + Pz = Qz^n$$

zurückführen, wenn man sie schreibt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right) - (n-1)P\frac{1}{z^{n-1}} = -(n-1)Q;$$

das Integral ist

$$\frac{1}{z^{n-1}} = e^{(n-1)\int P\,dx}\left[C - (n-1)\int Q e^{-(n-1)\int P\,dx}\,dx\right].$$

9. Sehr häufig ist es vorteilhaft, für x und y gleichzeitig neue Variable einzuführen. Beachtet man z. B., dass die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y-b} F\left(\frac{y^2 - 2by}{x^2}\right)$$

unter der Form

$$\frac{2(y-b)\,dy}{2x\,dx} = F\left(\frac{y^2 - 2by}{x^2}\right)$$

dargestellt werden kann, so erkennt man die Zweckmässigkeit der Substitutionen

$$x^2 = \xi, \quad y^2 - 2by = \eta,$$

wodurch die Differentialgleichung homogen wird, nämlich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = F\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

II. Eine sehr häufig anwendbare Integrationsmethode besteht darin, dass man die gegebene Differentialgleichung entweder nach y oder nach x auflöst, wodurch dieselbe eine der Formen

$$y = \Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{oder} \quad x = \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

erhält, und sie nachher noch einmal differenziert.

1. Wird zur Abkürzung der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = p$$

gesetzt, so führt die Differentiation von $y = \Phi(x, p)$ zu der Gleichung

$$p = \frac{\partial \Phi(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx},$$

welche eine Differentialgleichung zwischen den Variabeln x und p darstellt. Nicht selten ist dieselbe leicht zu integrieren und liefert dann eine Gleichung zwischen x und p. Eliminiert man aus dieser und der Gleichung $y = \Phi(x, p)$ die Grösse p, so erhält man die gesuchte Integralgleichung.

Als Beispiel diene die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \alpha - \alpha\beta x^2 + \beta x y \quad \text{oder} \quad \beta y = \alpha\beta x + \frac{p - \alpha}{x}.$$

Durch Differentiation der zweiten Form erhält man eine neue Gleichung, die nach Sonderung der Variabeln in

$$\frac{1 + \beta x^2}{x} dx = \frac{dp}{p - \alpha}$$

übergeht und demgemäss leicht integrabel ist; die Elimination von p giebt schliesslich

$$y = \alpha x + C e^{\frac{1}{2}\beta x^2}.$$

2. Wenn zweitens die gegebene Differentialgleichung auf die Form $x = \Psi(y, p)$ gebracht ist, so wird durch Differentiation

$$1 = \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx},$$

und zufolge der beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} = p \frac{dp}{dy}$$

kann dafür geschrieben werden

$$1 = p \left\{ \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \right\}.$$

Diese Differentialgleichung enthält nur y und p, sie liefert daher durch Integration eine Gleichung zwischen y und p. Eliminiert man aus dieser und der Gleichung $x = \Psi(y, p)$ die Grösse p, so erhält man die gesuchte Integralgleichung.

Beispielsweise sei gegeben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - ky^2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{y}{p + ky^2}.$$

Die Differentiation liefert die neue Gleichung

$$\frac{p}{y} \cdot \frac{dp}{dy} = -k(3p + ky^2),$$

welche durch die naheliegende Substitution $y^2 = z$ homogen wird, nämlich

$$2\frac{dp}{dz} = -k\left(3 + k\frac{z}{p}\right).$$

Diese lässt sich nach I Nr. 1 mittels der Substitution $\frac{z}{p} = t$ integrieren; es wird zunächst

$$\frac{2t\,dt}{(k+t)(k+2t)} = -\frac{dz}{z},$$

ferner durch Integration und Restitution von $t = \frac{y^2}{p}$

$$C(ky^2 + p)^2 = ky^2 + 2p,$$

und schliesslich, wenn p eliminiert wird, entweder $y = 0$ oder

$$y = \frac{2x}{C + kx^2}.$$

III. Eine Differentialgleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades hat die Form

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + Z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + Z_{n-1}\frac{dy}{dx} + Z_n = 0,$$

worin $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ gegebene Funktionen von x und y bedeuten; sie kann u. a. dadurch integriert werden, dass man sie zunächst nach $\frac{dy}{dx}$ auflöst und damit in n einzelne Differentialgleichungen zerlegt, welche sein mögen:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y), \ldots \frac{dy}{dx} = f_n(x, y).$$

Sind nun die Integrale derselben

$$F_1(x, y, C_1) = 0, \quad F_2(x, y, C_2) = 0, \ldots F_n(x, y, C_n) = 0,$$

so ist das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \ldots F_n(x, y, C_n) = 0.$$

Dabei darf man $C_1 = C_2 \ldots = C_n = C$ setzen, ohne die Allgemeinheit der Auflösung zu beeinträchtigen.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\alpha\frac{dy}{dx} = \beta x.$$

Diese zerfällt in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta x},$$

welche, durch Sonderung der Variabeln integriert, die Integralgleichungen liefern

$$y + \alpha x - \frac{2\sqrt{(\alpha^2 + \beta x)^3}}{3\beta} + C = 0, \quad y + \alpha x + \frac{2\sqrt{(\alpha^2 + \beta x)^3}}{3\beta} + C = 0;$$

das allgemeine Integral ist demnach

$$9\beta^2(y + \alpha x + C)^2 = 4(\alpha^2 + \beta x)^3.$$

Übrigens sei noch bemerkt, dass sich homogene Differentialgleichungen höherer Grade mittels der in I Nr. 1 erwähnten Substitution integrieren lassen und dass auch die in II auseinandergesetzte Methode bei nichtlinearen Differentialgleichungen häufig gute Dienste leistet.

IV. Eine Differentialgleichung erster Ordnung hat ein allgemeines Integral, das eine willkürliche Konstante enthält. Legt man dieser einen besonderen Wert bei, so erhält man ein partikuläres Integral. Ausserdem kann die Differentialgleichung noch ein singuläres Integral besitzen, das in dem allgemeinen Integral nicht enthalten ist. Denkt man sich nämlich die gegebene Differentialgleichung geometrisch als Eigenschaft einer unbekannten Kurve, so repräsentiert die allgemeine Integralgleichung

$$F(x, y, C) = 0$$

eine Schar von Kurven, die alle jene Eigenschaft besitzen. Die nämliche Eigenschaft kommt dann auch der einhüllenden Kurve zu. Das singuläre Integral findet man hiernach (Tl. I § 25) dadurch, dass man aus den Gleichungen

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

die willkürliche Konstante C eliminiert.

Z. B. die Differentialgleichung

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$y - a = \frac{x^2}{a}$$

und das singuläre

$$y^2 = 4x^2;$$

die geometrische Bedeutung beider ist ohne weiteres klar.

Ist eine Differentialgleichung entweder linear oder in ein System von linearen und rationalen Gleichungen zerlegbar, so hat sie kein singuläres Integral.

Z. B. hat die Differentialgleichung

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x - y)\frac{dy}{dx} - x = 0$$

kein singuläres Integral, weil sie sich darstellen lässt in der Form:

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(y\frac{dy}{dx} + x\right) = 0.$$

§ 42.
Einfache Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades.

1. Bei einer gewissen Kurve sei die Strecke, welche die im Kurvenpunkte xy konstruierte Tangente von der x-Achse abschneidet, gleich dem arithmetischen Mittel zwischen einer gegebenen Strecke a und der Abscisse x; man sucht die Gleichung der Kurve.

Aus der Differentialgleichung

$$x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \tfrac{1}{2}(a + x) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x - a}$$

findet man nach Sonderung der Variabeln, dass die gesuchte Kurve eine durch die Gleichung

$$by = (x - a)^2$$

bestimmte Parabel ist, wobei b die willkürliche Konstante bezeichnet.

2. Soll der vorhin erwähnte von der Tangente gebildete Abschnitt gleich dem geometrischen Mittel zwischen a und x sein, so ergiebt sich als Gleichung der Kurve

$$\sqrt{\frac{x}{a}} \pm \sqrt{\frac{y}{b}} = 1,$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0.$$

Die Kurve ist demnach eine Parabel, welche die Koordinatenachsen berührt.

3. Wenn der vorhin erwähnte Abschnitt das harmonische Mittel zwischen a und x bilden soll, so findet sich

$$xy = C(x-a)^2.$$

Die Kurve ist hiernach eine Hyperbel, deren Asymptoten durch den Koordinatenanfang gehen und mit der x-Achse die Winkel $\operatorname{arctan} C$ und $\frac{1}{2}\pi$ einschliessen.

4. Soll der vorhin erwähnte Abschnitt $= \frac{x^2}{a}$ sein, so ergiebt sich, dass die Kurve eine durch die Gleichung

$$(x-a)(y-b) = ab$$

bestimmte gleichseitige Hyperbel ist.

5. Wird allgemein verlangt, dass die von der Tangente auf der Abscissenachse abgeschnittene Strecke eine gegebene Funktion der Abscisse, etwa $= \varphi(x)$ sein soll, so ist die Gleichung der Kurve

$$ly = \int \frac{dx}{x - \varphi(x)} + C.$$

6. In einer Kurve sei die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, gleich dem arithmetischen Mittel zwischen a und x; man sucht die Gleichung der Kurve.

Beachtet man, dass die linke Seite der Gleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(a+x)$$

durch Zusatz des Faktors $-\frac{dx}{x^2}$ ein vollständiges Differential wird, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{a + xl\left(\frac{c}{x}\right)\right\}.$$

7. Soll der von der Tangente auf der y-Achse gebildete Abschnitt gleich dem geometrischen Mittel zwischen a und x sein, so ergiebt sich

$$y = Cx - 2\sqrt{ax} \quad \text{oder} \quad (Cx - y)^2 = 4ax,$$

welcher Gleichung eine Parabel entspricht.

8. Wenn der vorhin erwähnte Abschnitt das harmonische Mittel zwischen a und x bilden soll, so folgt

$$y = x\left\{C - 2l\left(\frac{x}{a+x}\right)\right\}.$$

9. Für den Fall, dass der erwähnte Abschnitt $= \frac{x^2}{a}$ sein soll, findet sich eine durch die Gleichung

$$y = x\left(C - \frac{x}{a}\right)$$

bestimmte Parabel.

10. Wird allgemein verlangt, dass der genannte Abschnitt eine gegebene Funktion der Abscisse, etwa $= \psi(x)$ sein soll, so findet sich

$$y = x\left\{C - \int \frac{\psi(x)}{x^2}\, dx\right\}.$$

11. In einer Kurve soll die über der Strecke $x - h$ stehende Fläche gleich dem m^{ten} Teile des Rechtecks aus Abscisse und Ordinate sein; man verlangt die Gleichung der Kurve.

Aus

$$\int_h^x y\, dx = \frac{xy}{m}$$

erhält man durch Differentiation die Differentialgleichung

$$my = x\frac{dy}{dx} + y,$$

deren Integral ist

$$y = Cx^{m-1}.$$

Da zufolge der Differentiation die Konstante h weggefallen ist, so muss das Resultat erst verifiziert werden. Nun ist

$$\int_h^x y\, dx = \frac{C(x^m - h^m)}{m}, \quad \frac{xy}{m} = \frac{Cx^m}{m};$$

die Gleichheit beider Ausdrücke kann nur bestehen, wenn m positiv und $h = 0$ genommen wird, während C willkürlich bleibt.

12. Es wird die Kurve gesucht, welche die Eigenschaft besitzt

$$\int_a^x y\,dx = \tfrac{1}{3}x(y+b).$$

Durch Differentiation der vorliegenden und Integration der entstehenden Gleichung findet sich

$$y = Cx^2 + \tfrac{1}{2}b;$$

die nachherige Verifikation zeigt, dass im Falle $a = 0$ die Integrationskonstante C beliebig gewählt werden kann, dass hingegen im Falle $a \gtrless 0$

$$C = -\frac{3b}{2a^2}$$

genommen werden muss.

13. Man sucht die Kurve, die folgende Eigenschaft besitzt

$$\int_a^x y\,dx = x\sqrt{by}.$$

Nach dem vorhin benutzten Verfahren ergiebt sich

$$y = \frac{bc^2}{(c-x)^2};$$

dabei muss $a = 0$ und x zwischen 0 und c genommen werden.

14. Für die allgemeine Aufgabe

$$\int_a^x y\,dx = x\varphi(y)$$

erhält man als Integralgleichung

$$lx = \int \frac{\varphi'(y)\,dy}{y - \varphi(y)} + C,$$

bei der in jedem speziellen Falle eine Verifikation erforderlich ist, um a oder C näher zu bestimmen.

15. In einer Kurve soll die über der Abscisse x stehende Fläche $= ay - bx$ sein; man sucht die Gleichung der Kurve.

Unter Rücksicht auf die gegebene Bedingung findet sich

$$y = b\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right).$$

16. Wenn die über der Abscisse stehende Fläche $= bx - 2a\sqrt{by}$ sein soll, so ergiebt sich

$$y = b\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} - 1}{e^{\frac{x}{a}} - 1}\right)^2.$$

17. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\int_h^x y\,dx = bx + \psi(y)$$

erhält man die Auflösung

$$x = \int \frac{\psi'(y)}{y - b}\,dy + C,$$

die in jedem speziellen Falle zu verifizieren ist.

18. Man verlangt die Kurve, worin der von $\theta = 0$ ab gerechnete Sektor

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta$$

dem Kreissektor $\frac{1}{2}(\sqrt{ar})^2\theta$ gleichkommt.

Die Polargleichung der gesuchten Kurve ist

$$r = \frac{a\gamma}{\gamma - \theta},$$

mithin die Kurve eine hyperbolische Spirale. Dabei muss θ kleiner als die willkürliche Konstante γ genommen werden.

19. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\int_a^\theta r^2 d\theta = F(r)\,.\,\theta$$

erhält man die Auflösung

$$l\theta = \int \frac{F'(r)\,dr}{r^2 - F(r)} + C,$$

die in jedem speziellen Falle einer Verifikation bedarf.

20. Man verlangt die Kurve, worin der von $\theta = 0$ ab gerechnete Sektor

$$S = \tfrac{1}{2}a^2\theta - ar$$

ist.

Bei gehöriger Bestimmung der Integrationskonstanten findet sich

$$r = a\frac{e^{\theta}-1}{e^{\theta}+1}.$$

21. Für die analoge Aufgabe

$$S = \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}a^2\theta$$

erhält man die Auflösung

$$r = a\sqrt{e^{\theta}-1}.$$

22. Soll überhaupt die Gleichung

$$\int_{\alpha}^{\theta} r^2 d\theta = A\theta + f(r)$$

bestehen, so folgt

$$\theta = \int \frac{f'(r)\,dr}{r^2 - A} + C,$$

welches Resultat in jedem speziellen Falle der Verifikation bedarf.

23. Man verlangt diejenige Kurve, worin zwischen den Koordinaten x, y und dem von $x = 0$ ab gerechneten Bogen s die Relation

$$s = 2\sqrt{ax} + y$$

stattfindet.

Durch Differentiation dieser Gleichung und Integration der entstehenden Differentialgleichung findet man

$$y + C = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}} - \sqrt{ax},$$

wobei $C = 0$ sein muss vermöge des Anfangswertes von s. (Vergl. § 13, Aufg. 3.)

24. Soll überhaupt die Gleichung

$$\int_{h}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx = \varphi(x) \pm y$$

bestehen, so folgt

$$C \pm y = \tfrac{1}{2}\left\{\int \frac{dx}{\varphi'(x)} - \varphi(x)\right\},$$

welches Resultat in jedem speziellen Falle der Verifikation bedarf.

25. Man verlangt die Kurve, worin zwischen x, y und dem von $x = 0$ ab gerechneten Bogen s die Relation

$$s = \sqrt{y^2 - a^2} - x$$

stattfindet.

Bei gehöriger Bestimmung der Konstanten erhält man

$$y = a \sec \frac{2x}{a}.$$

26. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\int_h^x \sqrt{1 + y'^2}.dx = \psi(y) \pm x$$

ist die Auflösung

$$C \pm x = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{dy}{\psi'(y)} - \psi(y)\right\},$$

wozu die nötige Verifikation gehört.

27. Man verlangt die Kurve, worin zwischen den Polarkoordinaten θ, r und dem von $\theta = 0$ ab gerechneten Bogen s die Relation besteht

$$s = a\theta - r.$$

Bei gehöriger Bestimmung der Konstanten ergiebt sich als Polargleichung

$$r = a\frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1};$$

diese Kurve geht vom Koordinatenanfang aus und hat einen mit dem Radius a beschriebenen Kreis zur Asymptote.

28. Man verlangt die Polargleichung derjenigen Kurve, bei welcher zwischen dem von $\theta = 0$ ab gerechneten Sektor S, dem Bogen s und dem Radiusvektor r die Relation besteht

$$S = \frac{1}{2} a(s - r).$$

Es ergiebt sich die nämliche Kurve wie in Nr. 27.

29. Es wird die Kurve gesucht, in welcher die über der Abscisse x stehende Fläche U, der von $x = 0$ ab gerechnete Bogen s und die Ordinate y durch die Gleichung

$$U = a(s - y)$$

verbunden sind.

Bei gehöriger Bestimmung der Konstanten erhält man

$$y = a\sqrt{1 - e^{-\frac{x}{a}}}.$$

30. Wenn die über der Abscisse x stehende Fläche einer Kurve um die Abscissenachse vollständig herumgedreht wird, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen V und dessen Mantel S heissen möge; es wird nun die Kurve gesucht, bei der die Relation

$$V = \tfrac{1}{2}a(S - \pi y^2)$$

stattfindet.

Die Kurve ist hier dieselbe wie in Nr. 29.

§ 43.

Homogene und lineare Differentialgleichungen.

1. Man sucht die Kurve, worin die Subtangente das arithmetische Mittel zwischen der Abscisse und der Ordinate ist.

Die gesuchte Kurve hat zur Gleichung

$$(x - y)^2 - 2cy = 0$$

und ist demnach eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse einen Winkel von 45^0 bildet.

2. Für die allgemeinere Aufgabe

$$Sbtg. = mx + ny$$

erhält man die Lösung

$$Cy^m = (m - 1)x + ny.$$

3. Es wird die Kurve gesucht, worin die Subnormale das arithmetische Mittel zwischen der Abscisse und der Ordinate ist.

Als Gleichung der Kurve findet sich

$$(x - y)^2(x + 2y) = C.$$

4. Bei der allgemeineren Aufgabe

$$Sbnorm. = mx + ny$$

sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Ist erstens

$$4m + n^2 > 0,$$

so setze man zur Abkürzung

$$\mu = \tfrac{1}{2}(n + \sqrt{4m + n^2}), \quad \nu = \tfrac{1}{2}(n - \sqrt{4m + n^2});$$

die gesuchte Gleichung ist dann

$$(y - \mu x)^\mu = C(y - \nu x)^\nu.$$

Ist z. B. $m = -1$, $n = \frac{3}{\sqrt{2}}$, so kann man der Gleichung die Form

$$(y - \sqrt{2}\,.\,x)^2 = 2a(\sqrt{2}\,.\,y - x)$$

erteilen, welcher eine Parabel entspricht.

Für den zweiten Fall $4m + n^2 = 0$ ergiebt sich

$$l\left(\frac{2y - nx}{c}\right) = \frac{nx}{2y - nx}.$$

Ist drittens

$$4m + n^2 < 0,$$

so setze man zur Abkürzung

$$\sqrt{-(4m + n^2)} = \lambda;$$

die gesuchte Gleichung ist dann

$$l\left(\frac{y^2 - mx^2 - nxy}{C}\right) = \frac{2n}{\lambda} \arctan \frac{nx - 2y}{\lambda x},$$

wofür auch die beiden Gleichungen geschrieben werden können

$$x = ae^{\varkappa\omega} \cos\omega, \quad y = \frac{na}{2\varkappa} e^{\varkappa\omega}(\varkappa \cos\omega - \sin\omega),$$

$$\varkappa = \frac{n}{\sqrt{-(4m + n^2)}}.$$

Einen bemerkenswerten speziellen Fall liefern die Werte $m = -2$, $n = 2$, denen $\varkappa = 1$ entspricht.

5. In einer Kurve sei die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, $= m\frac{y^2}{x}$; man sucht die Gleichung der Kurve.

Die verlangte Gleichung ist

$$y = \frac{x}{m\,l\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

6. In einer Kurve sei die Strecke, welche die Normale von der Abscissenachse abschneidet, $= n\frac{y^2}{x}$; es soll die Gleichung der Kurve gesucht werden.

Wenn $n \gtrless 1$ ist, ergiebt sich

$$(n-1)\,y^2 = x^2 + Cx^{2n};$$

dagegen hat man für den Fall $n = 1$:

$$y^2 = 2x^2\, l\left(\frac{a}{x}\right).$$

7. In einer Kurve stehe die von der Tangente auf der Ordinatenachse abgeschnittene Strecke in konstantem Verhältnis zum Radiusvektor; man sucht die Gleichung der Kurve.

Bezeichnet $m:1$ das genannte Verhältnis, so ergiebt sich

$$y = \tfrac{1}{2}x\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^m - \left(\frac{x}{a}\right)^m\right\}.$$

Im Falle $m = 1$ ist die Kurve eine Parabel.

8. In einer Kurve stehe die von der Normale auf der Abscissenachse abgeschnittene Strecke in konstantem Verhältnis zum Radiusvektor; man sucht die Gleichung der Kurve.

Bezeichnet $n:1$ das gegebene Verhältnis, so folgt

$$x^2 + y^2 = n^2(x-c)^2;$$

die Kurve ist hiernach ein Kegelschnitt, dessen numerische Exzentrizität $= n$, und von dem ein Brennpunkt zum Koordinatenanfang genommen ist.

Zu demselben Resultate führt die Substitution $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

9. In einer Kurve stehen die Strecken, welche die Tangente von der Ordinatenachse, und die Normale von der Abscissenachse abschneidet, in konstantem Verhältnis zu einander; man sucht die Gleichung der Kurve.

Bezeichnet $1:\mu$ das gegebene Verhältnis, so ergiebt sich

$$\mu \arctan\frac{y}{x} + \tfrac{1}{2}l(x^2+y^2) = lc;$$

die Kurve ist demnach eine logarithmische Spirale.

10. Man verlangt diejenige Kurve, bei der das arithmetische Mittel aus den in der vorigen Aufgabe erwähnten Strecken die konstante Grösse a besitzt.

Die betreffende Differentialgleichung ist nicht homogen, wird es aber durch die Substitutionen $x = \xi + a$, $y = \eta + a$; man erhält schliesslich die Integralgleichung

$$\frac{1}{2} l \left\{ \frac{(x-a)^2 + (y-a)^2}{c^2} \right\} = arctan \frac{y-a}{x-a},$$

die eine logarithmische Spirale charakterisiert.

11. Man verlangt die Kurve, worin das von der Tangente auf der Ordinatenachse abgeschnittene Stück $= \frac{y^2}{b}$ ist.

Die betreffende Differentialgleichung wird homogen durch die Substitution $y = \frac{1}{z}$; die Gleichung der Kurve ist

$$(x-a)(y-b) = ab.$$

12. Die vorige Aufgabe bildet einen speziellen Fall der folgenden allgemeineren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\{1 + y f(x)\};$$

das Integral dieser Differentialgleichung ist

$$y = \frac{x}{C - \int f(x)\, dx}.$$

13. In einer Kurve sei die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, $= \alpha x^m + \beta y$; man sucht die Gleichung dieser Kurve.

Die Differentialgleichung wird linear; es folgt

$$y = C x^{1-\beta} - \frac{\alpha x^m}{\beta + m - 1}, \quad \text{für } \beta + m \gtrless 1,$$

$$y = \alpha x^{1-\beta}\, l\left(\frac{c}{x}\right), \quad \text{für } \beta + m = 1.$$

14. Man sucht die Kurve, bei der die Relation

$$Subnorm. = \varkappa x^\mu + \lambda \frac{y^2}{x}$$

stattfindet.

Durch Substitution von $y^2 = z$ lässt sich diese Differentialgleichung auf die vorige zurückführen; ihr Integral ist

$$y^2 = C x^{2\lambda} + \frac{2\varkappa x^{1+\mu}}{1 - 2\lambda + \mu}, \quad \text{für } 1 - 2\lambda + \mu \gtrless 0,$$

$$y^2 = 2\varkappa x^{2\lambda}\, l\left(\frac{x}{c}\right), \quad \text{für } 1 - 2\lambda + \mu = 0.$$

15. In einer Kurve sei die von der Tangente auf der Ordinatenachse abgeschnittene Strecke $= a \sec\theta$, wo θ den Winkel zwischen Abscissenachse und Radiusvektor bezeichnet; man sucht die Gleichung der Kurve.

Die Differentialgleichung ist zwar nicht homogen, kann aber wie homogene Gleichungen behandelt werden; es ergiebt sich

$$y = \tfrac{1}{2} x \left\{ e^{\frac{a}{x}+b} - e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)} \right\}.$$

16. Wenn die in der vorigen Aufgabe erwähnte Strecke $= a \sec^3\theta$ sein soll, so folgt

$$(a + bx)^2 (x^2 + y^2) = x^2 y^2.$$

17. In einer Kurve sei die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2} \mu x^2 - a y;$$

es wird die Gleichung der Kurve gesucht.

Bei gehöriger Bestimmung der Konstanten ergiebt sich

$$y = \mu x - \mu a \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

18. Man verlangt die Kurve, worin die über der Strecke x stehende Fläche ist

$$U = \frac{xy}{m} + k x^n.$$

Unter der Voraussetzung $m \gtrless n$ erhält man

$$y = C x^{m-1} + \frac{kmn}{m-n} x^{n-1};$$

bei positiven m und n bleibt C beliebig.

Im Falle $m = n$ ergiebt sich

$$y = k m^2 x^{m-1} l\left(\frac{c}{x}\right).$$

19. In einer Kurve sei die von $\theta = 0$ ab gerechnete Sektorenfläche

$$S = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{r^2\theta}{2} + (a\theta)^2,$$

man sucht die Polargleichung der Kurve.

Dieselbe ist

$$r^2 = 12 a^2 \theta + b^2 \theta^2.$$

20. Es wird die Polargleichung der Kurve gesucht, für welche die Gleichung
$$S = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}(a \sin\theta)^2$$
stattfindet.

Die gesuchte Gleichung lautet
$$r^2 = (b^2 - a^2\theta)\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta.$$

§ 44.

Differentialgleichungen verschiedener Grade.

1. Man sucht die Kurve, bei der das arithmetische Mittel zwischen der Subtangente und der Subnormale gleich der Abscisse ist.

Die verlangte Eigenschaft kommt einer Parabel zu, wenn deren Achse zur Abscissenachse und die Direktrix zur Ordinatenachse genommen wird.

2. Man sucht die Kurve, bei der das vorhin erwähnte Mittel gleich dem Radiusvektor ist.

Der Aufgabe genügt eine Parabel, wenn deren Achse zur Abscissenachse genommen und die Ordinatenachse senkrecht hierzu durch den Brennpunkt gelegt wird.

3. Das harmonische Mittel zwischen Subtangente und Subnormale sei gleich der Abscisse; man verlangt die zugehörige Kurve.

Letztere ist eine Parabel, deren Direktrix die Abscissenachse und deren Achse die Ordinatenachse ist.

4. Das vorige harmonische Mittel sei $= \dfrac{y^2}{x}$; man sucht die zugehörige Kurve.

Letztere ist dieselbe Kurve wie in Nr. 1.

5. Das vorige harmonische Mittel sei $= 2x\sin^2\theta$; man sucht die zugehörige Kurve.

Der Aufgabe genügt sowohl eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade, als eine gleichseitige Hyperbel.

6. Für $OM = x$, $MP = y$ bezeichne Q den Punkt, in dem eine durch P senkrecht zu OP gelegte Gerade die Abscissenachse schneidet, ferner U den Durchschnitt der Normale mit der Abscissenachse, endlich V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse; man verlangt die Kurve, bei der das Rechteck aus OU und OV gleich der Summe von der Dreieckfläche OMP und der Hälfte der Dreieickfläche MPQ ist.

Der Aufgabe genügen eine Parabel und eine Ellipse, deren Gleichungen sind

$$y^2 = cx \quad \text{und} \quad 2x^2 + y^2 = 4ax.$$

7. Man verlangt die Kurve, für welche ist

$$OU.OV = 4(\triangle OMP - \triangle MPQ).$$

Die beiden Auflösungen sind

$$xy = c^2 \quad \text{und} \quad y^2 = x^2 + \frac{x^4}{a^2}.$$

8. Man verlangt die Kurve folgender Eigenschaft:

$$OU.OV = \tfrac{1}{2}\triangle OPQ.$$

Die Gleichung der Kurve lautet

$$(y^2 - ax)^2 = 4ax^3.$$

9. Es wird die Kurve gesucht, für welche die Relation besteht

$$OU.OV = xy.$$

Die Gleichung der Kurve ist

$$y^2 = 2x^2 l\left(\frac{a}{x}\right).$$

10. In einer Kurve sei der Abstand der Tangente vom Koordinatenanfang gleich dem Doppelten der Senkrechten, die vom Endpunkte M der Abscisse auf den Radiusvektor OP gefällt ist; man sucht die zugehörige Kurve.

Der Aufgabe genügt einerseits jede gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind, andrerseits auch die Fusspunktkurve jeder solchen Hyperbel, d. h. eine Lemniskate.

11. Die Entfernung der Tangente vom Koordinatenanfang stehe in konstantem Verhältnisse zum Radiusvektor; man sucht die Gleichung der betreffenden Kurve.

Bezeichnet $1:\mu$ das gegebene Verhältnis, so ergiebt sich

$$la = \tfrac{1}{2}l(x^2 + y^2) + \sqrt{\mu^2 - 1}\,.\,\mathrm{arctan}\,\frac{y}{x};$$

die Kurve ist also eine logarithmische Spirale.

12. Die vorige Aufgabe ist ein spezieller Fall des allgemeineren Problems: die Kurve zu bestimmen, bei der die Entfernung q der Tangente vom Koordinatenanfange eine gegebene Funktion des Radiusvektor r ist, also

$$q = f(r).$$

In rechtwinkligen Koordinaten lautet die betreffende Differentialgleichung

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

die sich aber direkt nicht integrieren lässt; in Polarkoordinaten dagegen erhält man als Gleichung der gesuchten Kurve

$$\theta - \gamma = \int \frac{dr}{r\sqrt{\left[\frac{r}{f(r)}\right]^2 - 1}}.$$

Der Annahme

$$q = \frac{r^{m+1}}{a^m}$$

entspricht hiernach die Kurve

$$r^m = a^m \cos m(\theta - \gamma),$$

die für $m = 1$ ein Kreis, für $m = \frac{1}{2}$ eine Kardioide, für $m = -\frac{1}{2}$ eine Parabel, für $m = -2$ eine gleichseitige Hyperbel ist.

Findet zwischen q und r die Gleichung statt

$$\left(\frac{A}{q}\right)^2 - \frac{2B}{r} = 1,$$

so ergiebt sich als Polargleichung der Kurve

$$r = \frac{A^2}{B + \sqrt{A^2 + B^2}.\cos(\theta - \gamma)};$$

letztere ist demnach ein Kegelschnitt, wovon ein Brennpunkt mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt.

13. Es wird die Kurve gesucht, in welcher zwischen dem von $x = 0$ ab gerechneten Bogen s und den Koordinaten die Relation

$$s = y - a + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y}$$

stattfindet.

In rechtwinkligen Koordinaten erhält man die Gleichung

$$cy = x^2 e^{\pm \frac{2y}{x}},$$

oder in Polarkoordinaten

$$r = c e^{2 \tan\theta} \sec^2\theta \sin\theta.$$

Die Verifikation zeigt, dass $c = 2a$ zu nehmen ist.

14. Unter M, P, Q, U mögen dieselben Punkte wie in Nr. 6 verstanden werden und es sei $MU > MQ$; man verlangt die Kurve, für welche

$$MU \cdot QU = h^2$$

ist, wenn h eine gegebene Konstante bezeichnet.

Die Differentialgleichung ist nicht homogen, wird es aber durch eine naheliegende Substitution; bezeichnet a eine willkürliche Konstante, so folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ah} = 1.$$

Die Kurve ist demnach eine Ellipse oder Hyperbel von gegebenem Parameter $2h$ und willkürlicher Haupthalbachse a.

15. Setzt man in der vorigen Aufgabe $MU < MQ$ voraus, so erhält man als allgemeines Integral die Hyperbel

$$\frac{y^2}{ah} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Der Aufgabe genügt ausserdem die Einhüllende aller, den verschiedenen a entsprechenden Hyperbeln, d. h. das singuläre Integral

$$y^4 = 4h^2x^2,$$

welches zwei Parabeln charakterisiert.

16. Es bezeichne R den Punkt, in dem eine in P auf dem Radiusvektor OP errichtete Senkrechte die Ordinatenachse schneidet, U den Durchschnitt der Normale mit der Abscissenachse, V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse; man verlangt die Kurve, bei der

$$OU \cdot OV = k \cdot OR$$

ist, wo k eine gegebene Gerade bezeichnet.

Mit Hilfe der Substitution $x^2 + y^2 = z$ lässt sich die betreffende Differentialgleichung homogen machen, wodurch man findet

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon x\right)^2.$$

Die Kurve ist demnach ein Kegelschnitt, von dem ein Brennpunkt in den Koordinatenanfang fällt, dessen Charakteristik willkürlich und dessen Halbparameter $= \frac{k}{\varepsilon}$ ist.

Als singuläres Integral ergiebt sich noch der Kreis

$$x^2 + y^2 = 4kx.$$

17. Unter T werde der Durchschnitt der Tangente mit der Abscissenachse, unter U derselbe Punkt wie in Nr. 16 verstanden; man sucht die Kurve, welcher die durch

$$OT.OU = k^2$$

ausgedrückte Eigenschaft zukommt.

Giebt man der Differentialgleichung die Form

$$\left(xy\frac{dy}{dx} - y^2\right)\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = k^2 y\frac{dy}{dx},$$

so bemerkt man leicht, dass die Substitution

$$x^2 + y^2 = z$$

vorteilhaft sein muss. Dieselbe führt zu der Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z+k^2}{x}\right)^2 = \left(\frac{z+k^2}{x}\right)^2 - 4k^2,$$

die homogen ist in Beziehung auf $z + k^2$ als neue Variable. Hiernach findet man als allgemeine Auflösung

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C - k^2} = 1,$$

d. h. eine Schar konfokaler Ellipsen oder Hyperbeln, deren gemeinsame lineare Exzentrizität $= k$ ist. Die singuläre Auflösung giebt zwei Punkte, nämlich die jenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Brennpunkte.

18. Es wird die Kurve gesucht, für welche

$$\overline{OV}^2 = a^2 \tan \tau$$

ist, wo V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse und τ den Winkel zwischen Tangente und Abscissenachse bedeutet.

Bringt man die Differentialgleichung auf die Form

$$\left[x^2\frac{dy}{dx} - (xy + \tfrac{1}{2}a^2)\right]^2 = a^2(xy + \tfrac{1}{4}a^2),$$

so liegt es nahe, $xy = z$ zu setzen; man erhält schliesslich als allgemeine Auflösung die Gerade

$$y = b + \frac{b^2}{a^2}x,$$

und als singuläre Lösung die gleichseitige Hyperbel

$$4xy = -a^2.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man rascher, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und die Gleichung

$$y - xp = a\sqrt{p}$$

differenziert, wodurch entsteht

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{p}} + x\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Dies giebt entweder

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{mithin} \quad p = C,$$

und zufolge der ursprünglichen Gleichung

$$y - Cx = a\sqrt{C},$$

woraus für $a\sqrt{C} = b$ die vorige allgemeine Auflösung entsteht. Nimmt man zweitens

$$\frac{a}{2\sqrt{p}} + x = 0 \quad \text{oder} \quad \sqrt{p} = -\frac{a}{2x},$$

so erhält man die singuläre Auflösung.

19. Es wird die Kurve gesucht, bei der die Relation

$$OV = a \cot \tau$$

stattfindet.

Die Differentialgleichung lässt sich auf folgende Form bringen:

$$\left(2x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = y^2 - 4ax;$$

um sie zu vereinfachen, setze man $y = uv$ und wähle u so, dass

$$2x\frac{du}{dx} - u = 0$$

wird. Dies giebt $u = \sqrt{x}$; die noch übrige Differentialgleichung für v kann durch Sonderung der Variabeln integriert werden, und schliesslich erhält man als allgemeine Auflösung die Gerade

$$y = b + \frac{a}{b}x,$$

und als singuläre Lösung die Parabel

$$y^2 = 4ax.$$

Zu den nämlichen Resultaten gelangt man rascher durch Differentiation der ursprünglichen Gleichung

$$y - xp = \frac{a}{p}.$$

20. Die allgemeine Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{oder} \quad y - xp = F(p)$$

gestattet gleichfalls die Anwendung der Differentiationsmethode. Es folgt nämlich

$$[x + F'(p)]\frac{dp}{dx} = 0;$$

für $\frac{dp}{dx} = 0$, also für $p = C$ erhält man das allgemeine Integral

$$y = Cx + F(C);$$

setzt man dagegen $x + F'(p) = 0$ und eliminiert p aus dieser und der ursprünglichen Gleichung, so gelangt man zum singulären Integrale.

Ist z. B. die Kurve zu bestimmen, deren Tangenten zwischen den Koordinatenachsen die konstante Länge a haben, so giebt die Differentialgleichung

$$y - xp = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

das allgemeine Integral

$$y = Cx + \frac{Ca}{\sqrt{1 + C^2}}$$

und das singuläre

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Das letztere ist eine Astroide und das allgemeine Integral stellt sämtliche Tangenten dieser Kurve dar, die in der That zwischen den Koordinatenachsen die konstante Länge a haben.

21. Ein weiteres durch seine Folgerungen bemerkenswertes Beispiel zu Nr. 20 bietet die Differentialgleichung

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - \lambda + \lambda\left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

das allgemeine Integral derselben ist

$$(y - Cx)^2 = 1 - \lambda + \lambda C^2,$$

und das singuläre Integral

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{1-\lambda} = 1.$$

Giebt man der obigen Gleichung die Form

$$\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)^2 = \frac{1-\lambda}{y^2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \frac{\lambda}{x^2}\left(\frac{dy}{y}\right)^2$$

und führt statt x und y zwei neue Variable ξ und η ein mittels der Substitutionen

$$x = \xi\eta, \quad y = \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\eta}{\eta}, \quad \frac{dy}{y} = -\left(\frac{\xi\, d\xi}{1-\xi^2} + \frac{\eta\, d\eta}{1-\eta^2}\right),$$

so erhält man die neue Differentialgleichung

$$\frac{d\xi^2}{(1-\xi^2)(\lambda-\xi^2)} = \frac{d\eta^2}{(1-\eta^2)(\lambda-r^2)}.$$

Ihr allgemeines Integral ist

$$[\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)} - C\xi\eta]^2 = 1 - \lambda + \lambda C^2;$$

das singuläre Integral, nämlich

$$(\lambda-\xi^2)(\lambda-\eta^2) = 0$$

hat hier keine Bedeutung, wenn man den Fall eines konstanten ξ oder η ausschliesst. Weiter folgt nun, dass der Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\lambda-\xi^2)}} \pm \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(\lambda-\eta^2)}} = 0$$

die Integralgleichung entspricht

$$\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)} - C\xi\eta = \pm\sqrt{1-\lambda+\lambda C^2};$$

mittels der Substitutionen

$$\lambda = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{C^2}{\varkappa^2}} = c$$

erhält man statt der letzten zwei Gleichungen die nachstehenden:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}} \pm \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}} = 0,$$

$$\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)} \pm \sqrt{1-\varkappa^2+\varkappa^2c^2}\,.\,\xi\eta = c,$$

worin noch die Vorzeichen zu bestimmen sind. Hierzu dient der spezielle Fall $\varkappa = 0$, wobei $\xi = \sin\varphi$, $\eta = \sin\psi$ gesetzt werden möge; die vorigen zwei Gleichungen gehen dann über in

$$d\varphi \pm d\psi = 0,$$

$$\cos\varphi\cos\psi \pm \sin\varphi\sin\psi = c.$$

Die Differentialgleichung ist hier unmittelbar integrabel und liefert $\psi \pm \psi = Const.$, oder $\cos(\varphi \pm \psi) = c$, d. h.

$$\cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi = c;$$

der Vergleich mit der vorigen Integralgleichung zeigt nun, dass dem Pluszeichen in der Differentialgleichung das Minuszeichen in der Integralgleichung entspricht und umgekehrt.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}} + \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}} = 0$$

hat demnach zum Integral

$$\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)} - \sqrt{1-\varkappa^2+\varkappa^2c^2}\,.\,\xi\eta = c,$$

oder in rationaler Form

$$-\varkappa^2\xi^2\eta^2 + \frac{\xi^2+\eta^2}{1-c^2} + 2\,\frac{c\sqrt{1-\varkappa^2+\varkappa^2c^2}}{1-c^2}\,\xi\eta - 1 = 0;$$

dieses Resultat stimmt überein mit der Angabe auf S. 516 der 4. Aufl. d. Compend. d. h. Anal., wenn die dortigen Buchstaben a, b, x, y durch $-(1+\varkappa^2)$, $+\varkappa^2$, ξ, η ersetzt werden.

Für $\xi = \sin\varphi$, $\eta = \sin\psi$ hat man die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} = 0,$$

und als deren Integral

$$\cos\varphi\cos\psi - \sqrt{1-\varkappa^2+\varkappa^2c^2}\,.\,\sin\varphi\sin\psi = c.$$

Es werde nun zur Abkürzung das bestimmte Integral

$$\int_0^\varphi \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}$$

mit $F(\varphi)$ bezeichnet und es sei die Aufgabe gestellt, φ und ψ so zu bestimmen, dass

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\gamma)$$

ist, wobei γ eine gegebene Konstante bezeichnet. Differenziert man diese Gleichung, so kommt man auf die vorige Differentialgleichung, deren Integral jetzt bekannt ist. Um noch die Integrationskonstante c zu bestimmen, hat man nur zu beachten, dass der gestellten Aufgabe die Werte $\varphi = 0$, $\psi = \gamma$ genügen, wodurch die Integralgleichung in $\cos\gamma = c$ übergeht. Die vollständige Auflösung des Problems liegt also in der Gleichung

$$\cos\varphi \cos\psi - \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\gamma} \,.\, \sin\varphi \sin\psi = \cos\gamma;$$

dies ist das Additionstheorem für die elliptischen Integrale erster Art.

22. Mit X und Y mögen die Strecken bezeichnet werden, welche die durch den Punkt xy gehende Tangente von den Achsen der x und y abschneidet; man verlangt die Kurve, der folgende Eigenschaft zukommt:

$$xX + yY = k^2.$$

Setzt man in der betreffenden Differentialgleichung $x = \xi^m$, $y = \eta^n$, so kann man m und n leicht so wählen, dass die Gleichung zwischen ξ, η, $d\xi$, $d\eta$ die Form

$$\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi} = F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)$$

erhält und daher nach Nr. 20 integrabel ist. Als allgemeines Integral findet sich eine Schar von konfokalen Kegelschnitten, nämlich

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C - k^2} = 1,$$

und als singuläres Integral die vier Geraden

$$(x \pm y)^2 = k^2.$$

23. Wird analog die Kurve verlangt, für die

$$\sqrt{xX} + \sqrt{yY} = k$$

ist, so lassen sich die vorigen Substitutionen zu gleichem Zwecke benutzen und geben, wenn die Wurzeln im absoluten Sinne genommen werden, als allgemeines Integral

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a + b = k,$$

und als singuläres Integral

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

24. Man sucht die Kurve, bei der das Rechteck aus der Subnormale und aus der Strecke, welche die Tangente auf der Ordinatenachse abschneidet, $= \frac{k^2 x}{y}$ ist.

Durch die in Nr. 22 erwähnten Substitutionen findet man als allgemeine Auflösung

$$\frac{y^2}{ak} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

und als singuläre Auflösung

$$y^4 = 4k^2x^2.$$

25. Für die Differentialgleichung

$$xy\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 + k^4\frac{dy}{dx} = 0$$

erhält man nach demselben Verfahren das allgemeine Integral

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad ab = k^2,$$

und ausserdem das singuläre Integral

$$4x^2y^2 = k^4.$$

26. Als allgemeines Integral der Differentialgleichung

$$x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ky^2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

findet man nach derselben Methode

$$(x - a)(y - b) = ab, \quad b = \frac{a^2}{k},$$

und als singuläres Integral

$$y(4x^2 + ky) = 0.$$

27. Der Radiusvektor des Kurvenpunktes xy heisse r, und es bezeichne u die Strecke, welche die Normale von der Abscissenachse abschneidet; gesucht wird die Kurve, bei der die Relation gilt

$$r(r^2 - xu) = a(r^2 - u^2).$$

Betrachtet man r als unabhängige Variable, so erhält man

$$r + \varepsilon x = a(1 - \varepsilon^2) \quad \text{oder} \quad r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\theta};$$

die Kurve ist demnach ein Kegelschnitt, der den Koordinatenanfang zum Brennpunkt, a zur Hauptthalbachse und eine beliebige numerische Exzentrizität ε besitzt.

Als singuläres Integral findet man noch

$$4a^2 - x^2 \pm 4ay = 0,$$

dem zwei Parabeln entsprechen.

28. Setzt man in der Differentialgleichung

$$4ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(2x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$$

$y = z^n$, so kann man dieselbe durch zweckmässige Wahl von n auf die Form

$$z - x\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

bringen und nachher die in Nr. 20 gemachte Bemerkung anwenden. Es findet sich als allgemeines Integral

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}(x - c),$$

und als singuläres Integral

$$y^2 = \tfrac{8}{27}\cdot\frac{x^3}{a}.$$

29. Es bezeichne v die Normale, u den Abschnitt, den sie auf der x-Achse bildet, und es werde die Kurve gesucht, für welche die Gleichung gilt

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1.$$

Mit Hilfe der Substitution $x^2 + y^2 = 2z$ bringt man die betreffende Gleichung leicht auf die in Nr. 28 erwähnte Form und erhält dann als allgemeines Integral

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{y^2}{a^2}(a^2 - c^2),$$

und als singuläres Integral

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

30. Die vorige Aufgabe ist ein spezieller Fall des allgemeineren Problems: die Kurve zu bestimmen, in welcher die Normale eine gegebene Funktion des Abschnittes ist, den sie auf der x-Achse bildet. Zur Integration der entsprechenden Differentialgleichung

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=f\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$$

dient wieder die Substitution $x^2+y^2=2z$; das allgemeine Integral ist

$$(x-c)^2+y^2=[f(c)]^2,$$

wozu noch ein singuläres Integral kommen kann.

31. Man sucht die Kurve, bei der das zwischen den Koordinatenachsen enthaltene Stück der Normale die konstante Länge a besitzt.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{dy}{dx}=p$ und differenziert die Differentialgleichung

$$x+yp=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

so kann man dem Resultate folgende Form erteilen

$$\frac{yp\,dp+(1+p^2)\,dy}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{ap\,dp}{(1+p^2)^2},$$

wo die linke Seite $=d\left(y\sqrt{1+p^2}\right)$ ist. Nach dieser Bemerkung erhält man

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1+p^2}\right\},$$

und aus der ursprünglichen Differentialgleichung

$$x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left\{a-c+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1+p^2}\right\}.$$

Für $p=\tan\tau$ ist auch

$$y=-\tfrac{1}{2}a\cos^3\tau+c\cos\tau,\quad x=a\left(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\tau\right)\sin\tau-c\sin\tau.$$

Will man hieraus τ eliminieren, so setze man für den Augenblick $\cos^2\tau=t$ und quadriere beide Gleichungen; dies giebt

$$x^2=(a-c)^2+c(a-c)t+a\left(c-\tfrac{3}{4}a\right)t^2-\tfrac{1}{4}a^2t^3,$$
$$y^2=\qquad\qquad c^2t\qquad -act^2\quad+\tfrac{1}{4}a^2t^3,$$

mithin

$$x^2+y^2=(a-c)^2+act-\tfrac{3}{4}a^2t^2.$$

Hieraus lässt sich t finden und durch Substitution des erhaltenen Wertes in eine der vorhergehenden Gleichungen gelangt man zu einer Gleichung zwischen x und y.

Am einfachsten ist die Sache im Falle $c = 0$, wobei x_0 und y_0 statt x und y geschrieben werden mögen; die Gleichungen

$$y_0 = -\tfrac{1}{2} a \cos^3 \tau, \quad x_0 = a(1 + \tfrac{1}{2} \cos^2 \tau) \sin \tau$$

geben dann

$$4(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^3 = 27 a^2 y_0^4.$$

Für den allgemeineren Fall ist nun

$$y = y_0 + c \cos \tau, \quad x = x_0 - c \sin \tau,$$

d. h. geometrisch: der Aufgabe genügt nicht nur die vorige, durch x_0 und y_0 ausgedrückte Kurve, sondern auch jede hierzu parallele Kurve.

32. Die allgemeine Differentialgleichung

$$x + y \frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

kann nach demselben Verfahren integriert werden; es ergiebt sich

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left\{ c + \int \frac{p \Phi'(p)}{\sqrt{1+p^2}} dp \right\},$$

$$x = \Phi(p) - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left\{ c + \int \frac{p \Phi'(p)}{\sqrt{1+p^2}} dp \right\}.$$

Nimmt man zuerst $c = 0$ und eliminiert p, so erhält man als partikuläres Integral eine Gleichung zwischen x und y, die man als Gleichung einer Kurve ansehen kann; das allgemeine Integral ist nachher die Gleichung derjenigen Kurve, welche der vorigen in irgend einer Entfernung c parallel läuft.

Ein Beispiel hierzu bildet die Gleichung

$$x + yp = \frac{kp}{\sqrt{\alpha + \beta p^2}},$$

wobei α verschieden von β sein möge. Für $p = \tan \tau$ ergeben sich die Werte

$$y = \frac{\alpha k}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\cos \tau}{\sqrt{\alpha \cos^2 \tau + \beta \sin^2 \tau}} + c \cos \tau,$$

$$x = -\frac{\beta k}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\sin \tau}{\sqrt{\alpha \cos^2 \tau + \beta \sin^2 \tau}} - c \sin \tau;$$

im speziellen Falle $c = 0$ folgt als partikuläres Integral

$$\frac{x^2}{\beta} + \frac{y^2}{\alpha} = \left(\frac{k}{\alpha - \beta}\right)^2;$$

der Aufgabe genügt daher der vorliegende Kegelschnitt und jede demselben parallele Kurve.

33. Die rechtwinkligen Koordinaten des Mittelpunktes der Polarnormale mögen u und v heissen; man sucht die Kurve, bei der die Mitttelpunkte der Polarnormalen auf einer durch die Gleichung

$$v = \frac{u^2}{2a}$$

bestimmten Parabel liegen.

In Polarkoordinaten sind die Werte von u und v

$$u = \tfrac{1}{2}\left\{r\cos\theta - \frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right\}, \quad v = \tfrac{1}{2}\left\{r\sin\theta + \frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right\},$$

woraus folgt

$$r = 2(u\cos\theta + v\sin\theta) = 2\left(u\cos\theta + \frac{u^2}{2a}\sin\theta\right).$$

Diese Gleichung soll benutzt werden, um u statt r als abhängige Variable einzuführen. Nun ist, wenn man den vorstehenden Wert von r in die Formel für v substituiert,

$$v = \frac{u^2}{2a} + \left\{\cos\theta + \frac{u}{a}\sin\theta\right\}\frac{du}{d\theta}\cos\theta,$$

d. h., weil $v = \dfrac{u^2}{2a}$ sein soll,

$$\left(\cos\theta + \frac{u}{a}\sin\theta\right)\frac{du}{d\theta} = 0.$$

Hieraus folgt einerseits $u = c$ und als Polargleichung der Kurve

$$r = 2\left(c\cos\theta + \frac{c^2}{2a}\sin\theta\right),$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$x^2 + y^2 = 2cx + \frac{c^2}{a}y.$$

Andrerseits ergiebt sich $u = -a\cot\theta$, mithin

$$r = -a\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta},$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \sqrt{-\frac{y^3}{y+a}}.$$

Das erste Integral, welches eine Schar von Kreisen bedeutet, ist das allgemeine; das zweite, dem ein Cissoide entspricht, bildet die singuläre Lösung.

34. Die vorige Aufgabe lässt sich dahin verallgemeinern, dass

$$v = f(u)$$

gesetzt und die zugehörige Gleichung zwischen x und y verlangt wird.

Nach demselben Verfahren erhält man als allgemeines Integral

$$x^2 + y^2 = 2cx + 2f(c)y,$$

wozu noch ein singuläres Integral kommen kann.

35. Zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y und dem vom Koordinatenanfang bis zum Punkte xy reichenden Bogen s bestehe die Gleichung

$$s^2 - y^2 = 2a(s - x);$$

man sucht die zugehörige Kurve.

Löst man die Gleichung nach s auf und differenziert, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\left[(2x - a)\frac{dy}{dx} - y\right]^2 = \frac{2x}{a}(a^2 - 2ax + y^2);$$

um sie zu vereinfachen, setze man $y = zw$ und bestimme z so, dass

$$(2x - a)\frac{dz}{dx} - z = 0$$

wird. Die übrig bleibende Gleichung ist

$$\frac{dw}{\sqrt{w^2 - a}} = \sqrt{\frac{2x}{a}} \cdot \frac{dx}{2x - a},$$

und hieraus erhält man für $2x = a\zeta^2$ als Gleichungen der Kurve

$$x = \tfrac{1}{2}a\zeta^2, \quad y = \tfrac{1}{2}a\left\{C(1 + \zeta)e^{-\zeta} - \frac{1}{C}(1 - \zeta)e^{+\zeta}\right\}.$$

Die Verifikation zeigt, dass $C = 1$ genommen werden muss, also

$$x = \tfrac{1}{2}a\zeta^2, \quad y = a\left\{\zeta\frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2} - \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2}\right\},$$

$$s = a\left\{1 + \zeta\frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2} - \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2}\right\},$$

wobei die Elimination von ζ keine Schwierigkeit hat.

36. Der Bogen s werde von einem noch zu bestimmenden Punkte an bis zum Punkte xy gerechnet und es sei

$$(s-y)^3 = 24a^2(s-x);$$

man sucht die zugehörige Kurve.

Setzt man $s - y = u$ und betrachtet u als unabhängige Variable, so ist einerseits $ds - dy = du$, d. h.

$$dy = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 - 1\right\} du,$$

andrerseits

$$u^3 = 24a^2(y - x + u) \quad \text{oder} \quad y = \frac{u^3}{24a^2} + x - u;$$

durch Differentiation dieser Gleichung und Substitution des Wertes von dy entsteht eine Differentialgleichung zwischen x und u, aus der sich findet

$$x - c = u \pm \frac{u^2}{4a}.$$

Der vorige Wert von y wird nun

$$y - c = \pm \frac{u^2}{4a} + \frac{u^3}{24a^2},$$

und aus der Gleichung $s - y = u$ folgt schliesslich

$$s - c = u \pm \frac{u^2}{4a} + \frac{u^3}{24a^2}.$$

Nimmt man z. B. $c = a$ und $\frac{u^2}{4a}$ mit dem oberen Zeichen, so erhält man durch Elimination von u

$$y = (\tfrac{1}{3}x - a)\sqrt{\frac{x}{a}} + \tfrac{5}{3}a,$$

$$s = (\tfrac{1}{3}x + a)\sqrt{\frac{x}{a}} - \tfrac{1}{3}a,$$

und hier ist s von derjenigen Stelle an gerechnet, wo $s = 0$, d. h. x gleich ist dem speziellen Werte

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - 2\right) a = 0{,}1038\ldots a.$$

Nimmt man $\frac{u^2}{4a}$ mit dem unteren Zeichen, so gelangt man zu derselben Kurve.

37. Die vorige Aufgabe bildet einen speziellen Fall des allgemeineren Problems, aus der Gleichung

$$s - kx = f(s - y)$$

die Gleichung der betreffenden Kurve herzuleiten.

Nach demselben Verfahren erhält man

$$x - c = ku + \int \sqrt{2f'(u) + k^2 - 1} \,.\, du,$$

$$y - kc = (k^2 - 1)u + f(u) + k \int \sqrt{2f'(u) + k^2 - 1} \,.\, du,$$

$$s - kc = k^2 u + f(u) + k \int \sqrt{2f'(u) + k^2 - 1} \,.\, du,$$

woraus im kongreten Falle durch Elimination von u Gleichungen zwischen x und y, sowie zwischen x und s hergeleitet werden können. Der Punkt, von dem ab s gerechnet wird, ist nachträglich durch die Bedingung $s = 0$ zu bestimmen.

§ 45.

Die Evolventen.

Allgemeine Formeln. Bezeichnen x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes, ξ und η die Koordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes, so wird die Evolute der ersten Kurve durch eine Gleichung von der Form

$$F(\xi, \eta) = 0$$

bestimmt; unter der Voraussetzung, dass diese Gleichung gegeben ist, soll hieraus die Gleichung zwischen x und y hergeleitet, d. h. die Evolvente bestimmt werden.

Die Verbindungslinie der Punkte xy und $\xi\eta$ ist einerseits Tangente an der Evolute, daher

$$y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi);$$

andrerseits bildet sie die Normale der Evolvente, steht also senkrecht auf der durch den Punkt xy gehenden Tangente an der Evolvente, mithin ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Eliminiert man ξ und η aus den drei vorhandenen Gleichungen, so bleibt eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ übrig, und diese ist die Differentialgleichung der Evolvente.

Die Form dieser Differentialgleichung lässt sich im allgemeinen bestimmen. Aus der Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ folgt nämlich

$$\eta = f(\xi), \quad \frac{d\eta}{d\xi} = f'(\xi),$$

und wenn zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, so gehen die zweite und dritte Gleichung über in

$$y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi), \quad f'(\xi) = -\frac{1}{p},$$

oder wegen des Wertes von $f'(\xi)$

$$x + py = \xi + pf(\xi), \quad f'(\xi) = -\frac{1}{p}.$$

Die letzte Gleichung liefert ξ ausgedrückt durch p, und nach Substitution dieses Wertes entsteht eine Differentialgleichung von der Form

$$x + yp = \Phi(p),$$

die immer integriert werden kann. Dass ihr allgemeines Integral eine willkürliche Konstante enthält, bedeutet geometrisch, dass einer gegebenen Evolute unendlich viele Evolventen entsprechen, die einander parallel sind.

Beispiele. 1. Die gegebene Evolute sei eine semikubische Parabel, mithin

$$\eta^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(\xi - h)^3}{h} \quad \text{oder} \quad \eta = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2(\xi - h)^3}{3h}},$$

wobei die Wurzel negativ genommen ist, damit dem untern Zweige der Evolute der obere Zweig der Evolvente entspreche; es ergiebt sich dann die Differentialgleichung

$$x + yp = h + \frac{h}{2p^2},$$

und als Integral derselben für $p = tan\,\tau$

$$y = h\,cot\,\tau + c\,cos\,\tau, \quad x = \tfrac{1}{2}h\,cot^2\tau - c\,sin\,\tau.$$

Der Spezialfall $c = 0$ liefert

$$y = \sqrt{2hx};$$

die Evolvente ist also die vorliegende Parabel und ausserdem jede Parallele zu dieser Parabel. (Vergl. Tl. I, § 17.)

2. Die gegebene Evolute sei eine Parabel, mithin

$$\eta = \frac{\xi^2}{2h};$$

die Evolvente ist dann durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$y = (\tfrac{1}{2} h\, l \tan \tfrac{1}{2}\tau + c) \cos \tau,$$
$$x = -\tfrac{1}{2} h \cot \tau - (\tfrac{1}{2} h\, l \tan \tfrac{1}{2}\tau + c) \sin \tau.$$

3. Die gegebene Evolute sei die Astroide, also durch die Gleichung

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

bestimmt; die Evolvente ist dann einerseits die Kurve sechsten Grades, deren Gleichung lautet

$$4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27 a^2 y^4,$$

sowie andrerseits jede Parallele zu dieser Kurve.

4. Wenn die gegebene Evolute eine Kettenlinie, mithin

$$\eta = \tfrac{1}{2} a \left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}\right)$$

ist, so findet sich als Differentialgleichung der Evolvente

$$x + yp = a\left\{\sqrt{1+p^2} + l\left(\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}\right)\right\},$$

und hieraus für $p = \tan \tau$

$$y = a \sin \tau + c \cos \tau,$$
$$x = a(\cos \tau + l \tan \tfrac{1}{2}\tau) - c \sin \tau.$$

Im Falle $c = 0$ giebt die Elimination von τ

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} l \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right);$$

die Evolvente der Kettenlinie ist also die Traktorie der Geraden und jede Parallele zu letzterer Kurve.

§ 46.

Die Trajektorien.

Allgemeine Formeln. Die Gleichung einer Kurve enthalte ausser den Koordinaten noch einen Parameter, durch dessen stetige Änderung eine Schar von Kurven derselben Art entsteht; dann

heisst **Trajektorie** der erwähnten Kurven jede neue Linie, die alle jene Kurven unter demselben Winkel schneidet.

In rechtwinkligen Koordinaten sei die Gleichung der gegebenen Kurve

$$f(x, y, h) = 0$$

und darin h der veränderliche Parameter; durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{\partial f(x, y, h)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, h)}{\partial y} dy = 0,$$

oder, wenn τ den Winkel bezeichnet, den die Tangente im Punkte xy mit der x-Achse einschliesst,

$$\tan \tau = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Durch den Punkt xy gehe ferner die Trajektorie und es sei τ_1 der Winkel, den die Tangente an der Trajektorie mit der x-Achse bildet; dann ist

$$\tan \tau_1 = \frac{dy}{dx}.$$

Der gegebenen Bedingung zufolge muss die Differenz $\tau_1 - \tau$ einem konstanten Winkel α gleich sein, dessen trigonometrische Tangente $\varkappa$ heissen möge, mithin

$$\frac{\tan \tau_1 - \tan \tau}{1 + \tan \tau_1 \tan \tau} = \varkappa;$$

substituiert man die Werte von $\tan \tau$, $\tan \tau_1$ und beachtet, dass h in der Gleichung der Trajektorie nicht mehr vorkommen darf, so gelangt man zu der Regel: durch Elimination von h aus den Gleichungen

$$f(x, y, h) = 0,$$

$$\left(\varkappa \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ergiebt sich die Differentialgleichung der Trajektorie. Im speziellen Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. wenn die Trajektorie eine **orthogonale** sein

soll, wird $\tan\tau . \tan\tau_1 = -1$, und dann ergiebt sich die Differentialgleichung der Trajektorie durch Elimination von h aus den Gleichungen

$$f(x, y, h) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Die im allgemeinen Integrale der Differentialgleichung vorkommende willkürliche Konstante lässt sich bestimmen, wenn die Trajektorie durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Falls die ursprüngliche Kurve durch Polarkoordinaten ausgedrückt und ihre Gleichung

$$F(r, \theta, h) = 0$$

ist, gilt eine vollkommen analoge Betrachtung. Die Winkel φ und φ_1, welche die Tangente an der gegebenen Kurve und die Tangente an der Trajektorie mit dem gemeinschaftlichen Radiusvektor r bilden, sind nämlich an die Bedingung $\varphi_1 - \varphi = \alpha$ gebunden; die Differentialgleichung der Trajektorie ergiebt sich daher durch Elimination von h aus den Gleichungen

$$F(r, \theta, h) = 0,$$

$$\left(\varkappa \frac{\partial F}{\partial \theta} - r \frac{\partial F}{\partial r}\right) \frac{dr}{d\theta} - r \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} + \varkappa r \frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0.$$

Im speziellen Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist einfacher

$$F(r, \theta, h) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{dr}{d\theta} - r^2 \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

Für die im allgemeinen Integrale vorkommende Konstante gilt wieder die frühere Bemerkung.

Beispiele. 1. Die gegebene Kurve sei eine Gerade, mithin

$$hx - y = 0;$$

es ist dann

$$(\varkappa h - 1) \frac{dy}{dx} + h + \varkappa = 0,$$

und durch Elimination von h

$$\left(\varkappa \frac{y}{x} - 1\right) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \varkappa = 0.$$

Als Integral dieser homogenen Differentialgleichung erhält man

$$\tfrac{1}{2}\varkappa l\left(\frac{x^2+y^2}{c^2}\right) = arctan\,\frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad r = ce^{\frac{\theta}{\varkappa}}.$$

Die Trajektorie eines Strahlenbüschels ist demnach eine logarithmische Spirale, die im Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. $\varkappa = \infty$, zu einem konzentrischen Kreise wird.

2. Ein rechter Winkel bewege sich so, dass sein Scheitel auf einer gegebenen Geraden fortrückt und der eine Schenkel immer durch einen festen Punkt geht; man sucht die orthogonale Trajektorie des anderen Schenkels.

Nimmt man die gegebene Gerade zur Abscissenachse und die vom festen Punkte darauf gefällte Senkrechte zur Ordinatenachse, so hat man als Gleichung der zu durchschneidenden Geraden

$$h(x-h) - ay = 0,$$

mithin als Differentialgleichung der Trajektorie

$$x + yp = -\frac{a}{p}, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Daraus folgt

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c - al\left(\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}\right)\right\};$$

die Elimination von p aus den beiden letzten Gleichungen führt zu der gesuchten Gleichung zwischen x und y.

3. Eine Gerade bewege sich so, dass die zwischen den Koordinatenachsen enthaltene Strecke derselben die konstante Länge a besitzt; man sucht die orthogonale Trajektorie dieser Geraden.

Aus der Gleichung der beweglichen Geraden

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{\sqrt{a^2-h^2}} = 1$$

ergiebt sich als Differentialgleichung der Trajektorie

$$x + yp = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}};$$

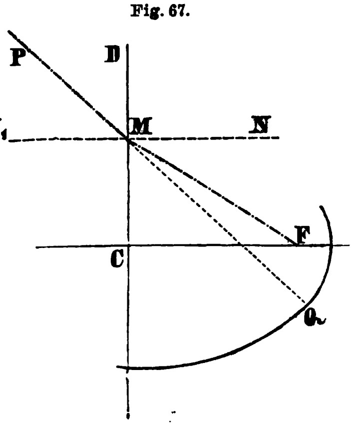
das Integral dieser Gleichung ist bereits in § 44 Nr. 31 entwickelt worden.

4. In Fig. 67 sei F ein leuchtender Punkt, CD die Trennungslinie zweier durchsichtiger Media von verschiedener Brechbarkeit, FM ein Lichtstrahl, der bei M jene Trennungslinie trifft und nach dem bekannten Gesetze

$$\frac{\sin NMF}{\sin N_1MP} = \mu$$

gebrochen wird; man sucht die orthogonale Trajektorie der gebrochenen Strahlen PQ.

Fig. 67.



Nimmt man CF und CD zu Koordinatenachsen und setzt $CF = g$, $CM = h$, so ist die Gleichung des gebrochenen Strahles

$$\frac{x}{\sqrt{\mu^2 g^2 + (\mu^2 - 1)h^2}} + \frac{y}{h} = 1;$$

für die Trajektorie ergiebt sich die Differentialgleichung

$$x + yp = \frac{\mu g p}{\sqrt{1 - \mu^2 + p^2}},$$

die nach § 44 Nr. 32 integriert werden kann. Die einfachste der gesuchten Trajektorien ist ein Kegelschnitt, wovon C der Mittelpunkt, F ein Brennpunkt und dessen Haupthalbachse $= \frac{g}{\mu}$ ist; die übrigen Trajektorien sind Parallelen zu diesem Kegelschnitt.

5. Man sucht die Trajektorie aller durch die Gleichung

$$y = h x^{\mu}$$

charakterisierten parabolischen Kurven.

Die Differentialgleichung der Trajektorie ist

$$\left(1 - \varkappa\mu \frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = \varkappa + \mu \frac{y}{x}$$

und kann wegen ihrer homogenen Form leicht integriert werden, wobei die Fälle $(\mu - 1)^2 - 4\varkappa^2\mu > 0$, $= 0$ und < 0 zu unterscheiden sind. Für eine orthogonale Trajektorie ergiebt sich die Gleichung

$$x^2 + \mu y^2 = C.$$

6. Es soll die orthogonale Trajektorie aller konfokalen Ellipsen aufgesucht werden.

Bezeichnet a die veränderliche grosse Halbachse, e die unveränderliche lineare Exzentrizität der Ellipse, so ist die Differentialgleichung der Trajektorie

$$\left(x - \frac{y}{p}\right)(x + yp) = e^2.$$

Nach § 44 Nr. 17 hat man als Integral derselben

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C - e^2} = 1.$$

Für $C > e^2$ würde die Trajektorie eine Ellipse sein, welche aber die gegebene Ellipse nicht schneidet; es muss demnach $C < e^2$ genommen werden, wodurch Hyperbeln entstehen, die der Ellipse konfokal sind.

Wird umgekehrt die Trajektorie einer Schar konfokaler Hyperbeln gesucht, so findet sich eine konfokale Ellipse.

7. Die orthogonale Trajektorie von Ellipsen, welche dieselbe grosse Achse und verschiedene kleine Halbachsen besitzen, ist bestimmt durch die Kurvengleichung

$$x^2 + y^2 = 2a^2 l\left(\frac{x}{c}\right).$$

8. Wenn in der Gleichung

$$Ax^m + By^n = 1$$

A konstant und B veränderlich ist, so wird die Trajektorie der entstehenden Kurven durch folgende Gleichung bestimmt

$$A(nx^2 + my^2) = \frac{2n}{2-m} x^{2-m} + C, \quad \text{wenn } m \gtrless 2,$$

$$A(nx^2 + 2y^2) = 2nl\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \text{wenn } m = 2.$$

9. Lässt man in der Gleichung

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

die Grösse ε sich stetig ändern, so erhält man eine Schar von Kegelschnitten, welche denselben Halbparameter k, dagegen ver-

schiedene numerische Exzentrizitäten besitzen; die Trajektorie dieser Kegelschnitte hat zur Polargleichung

$$\sin\theta = \frac{c}{r} e^{\frac{r}{k}},$$

wofür in rechtwinkligen Koordinaten gesetzt werden kann

$$x^2 = \left[k\, l\left(\frac{y}{c}\right)\right]^2 - y^2.$$

10. Setzt man in der Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

das Verhältnis $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ gleich einer Konstanten μ und lässt a variieren, so erhält man eine Schar ähnlicher Ellipsen, die einander im Koordinatenanfange berühren; die Trajektorie dieser Ellipsen hat zur Gleichung

$$(2-\mu)x^2 + y^2 = c^{2-\mu} y^{\mu}, \quad \text{für } \mu \lesseqgtr 2,$$

$$x^2 = y^2 l\left(\frac{c}{y}\right), \quad \text{für } \mu = 2.$$

11. Die Trajektorie einer Kurve zu finden, die in ihrer Ebene parallel einer gegebenen Richtung verschoben wird.

Legt man, unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die y-Achse in die gegebene Richtung und bezeichnet mit

$$y = \varphi(x)$$

die Gleichung der Kurve in ihrer anfänglichen Lage, so ist die Gleichung der Kurve in irgend einer anderen Lage

$$y - h = \varphi(x),$$

mithin nach den allgemeinen Vorschriften

$$\{\varkappa\varphi'(x) - 1\}\frac{dy}{dx} + \varphi'(x) + \varkappa = 0.$$

Der Elimination von h bedarf es hier nicht erst, weil h in der vorliegenden Gleichung nicht mehr vorkommt; die Gleichung der Trajektorie ist demnach

$$y - c = \int \frac{\varkappa + \varphi'(x)}{1 - \varkappa\varphi'(x)}\, dx.$$

Für die semikubische Parabel

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

ergiebt sich hieraus als orthogonale Trajektorie die gewöhnliche Parabel

$$y = c - 2\sqrt{ax}.$$

12. Die Trajektorie einer Kurve zu finden, die in ihrer Ebene um einen festen Punkt gedreht wird.

Der gegebene Punkt sei der Koordinatenanfang eines Polarsystems und

$$\theta = \psi(r)$$

die Gleichung der Kurve in ihrer ursprünglichen Lage; für eine spätere Lage ist dann

$$\theta - \beta = \psi(r),$$

mithin nach den allgemeinen Vorschriften

$$\{\varkappa + r\psi'(r)\}\frac{dr}{d\theta} - r\{1 - \varkappa r\psi'(r)\} = 0.$$

Der Elimination von β bedarf es hier nicht, mithin ist die Polargleichung der Trajektorie

$$\theta - \gamma = \int \frac{\varkappa + r\psi'(r)}{1 - \varkappa r\psi'(r)} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Rotiert z. B. eine Ellipse um ihren Mittelpunkt, so hat man als Gleichung derselben

$$\theta = arctan\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}}\right),$$

und als Gleichung der orthogonalen Trajektorie

$$\theta - \gamma = \frac{1}{ab}\int \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}{r}\, dr,$$

d. i., wenn mit Hilfe der Substitution $r^2 = u$ integriert wird,

$$\theta - \gamma = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}{2ab} + arctan\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}}\right)$$
$$+ \frac{a^2 + b^2}{2ab}\, arctan\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}}.$$

Lässt man einen über dem Durchmesser b konstruierten Kreis um den einen Endpunkt des Durchmessers rotieren, so hat man als Gleichung des Kreises

$$r = b \cos\theta \quad \text{oder} \quad \theta = \arccos\frac{r}{b},$$

und als Gleichung der orthogonalen Trajektorie

$$\theta - \gamma = -\left\{\frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r} \arccos\frac{r}{b}\right\}.$$

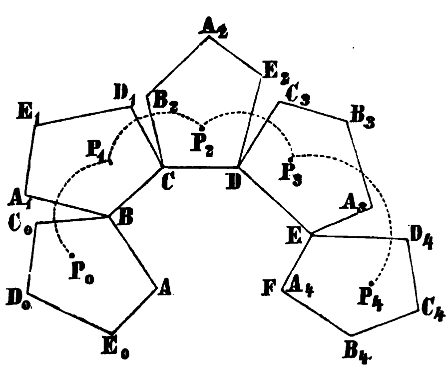
Die Trajektorie ist demnach die Traktorie eines mit dem Radius b beschriebenen Kreises.

§ 47.

Die Rollkurven.

Allgemeine Formeln. Auf einer festen Kurve, welche die Basis heissen möge, werde eine bewegliche Kurve fortgerollt, ohne dass ein Gleiten stattfindet; irgend ein bestimmter Punkt in der Ebene der rollenden Kurve beschreibt dann eine neue Linie, welche eine Rollkurve genannt wird.

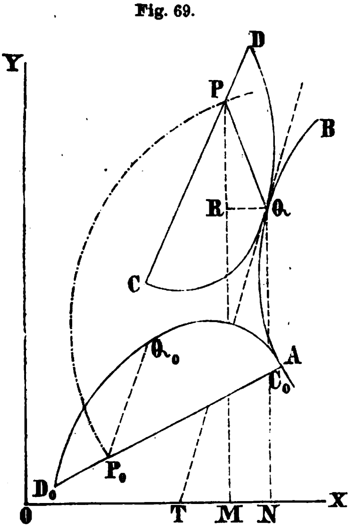
Fig. 68.



Um die genannte Bewegung zu veranschaulichen, denke man sich erst zwei gebrochene Linien $ABCDEF$ und $A_0B_0C_0D_0E_0$ (Fig. 68), deren korrespondierende Seiten gleich sind, nämlich $AB = A_0B_0$, $BC = B_0C_0$, $CD = C_0D_0$, $DE = D_0E_0$ etc., und betrachte $ABCDEF$ als Basis, $A_0B_0C_0D_0E_0$ als rollende Kurve, wobei in der primitiven Lage der letzteren A_0B_0 mit AB zusammenfallen möge. Die nächstfolgende Lage von $A_0B_0C_0D_0E_0$ ist dann diejenige, bei der B_0C_0 auf BC fällt; sie wird herbeigeführt durch Drehung der beweglichen Kurve um B, und hierbei beschreibt jeder in der Ebene dieser Kurve liegende Punkt P_0 einen Kreisbogen P_0P_1, dessen Radius BP_0 und dessen

Centriwinkel $= \angle C_0BC$ ist. Auf analoge Weise entsteht die dritte Lage durch Drehung um C, wobei P_1 wieder einen Kreisbogen P_1P_2 beschreibt, dessen Mittelpunkt C und dessen Centriwinkel $= D_1CD$ ist u. s. w. Wenn demnach ein Polygon auf einer gebrochenen Linie rollt, so besteht die Rollkurve $P_0P_1P_2P_3P_4$ aus einer Reihe von Kreisbögen. Lässt man die Polygonseiten unendlich abnehmen und denkt sich die Basis, sowie die rollende Kurve als Grenze eines eingeschriebenen Polygons, so wird die Rollkurve zur Einhüllenden jener Kreisbögen; ihre Gleichung lässt sich daher nach den Tl. I., § 25 gegebenen Methoden entwickeln.

Fig. 69.



In Fig. 69 sei die Basis AQB auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen und zwar $ON = \xi$, $NQ = \eta$; die Anfangslage der rollenden Kurve sei $C_0Q_0D_0$ und es falle dabei C_0 auf A; ihre Gleichung sei in Polarkoordinaten ausgedrückt, deren Pol der beschreibende Punkt P_0 sein möge, also $\angle C_0P_0Q_0 = \theta$, $P_0Q_0 = r$. Ist nun CQD eine spätere Lage der beweglichen Kurve, in der sie die Basis in Q berührt, so hat man erstens $arc\,CQ = arc\,C_0Q_0 = arc\,AQ$, d. h.

$$\text{A)}\qquad \int\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\cdot dr = \int\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\cdot d\xi;$$

zweitens ist Q der Mittelpunkt und QP der Radius eines der Kreise, als deren Einhüllende die Rollkurve betrachtet werden kann, daher für $OM = x$ und $MP = y$

$$\text{B)}\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2.$$

Nachdem man θ durch r und η durch ξ ausgedrückt hat, enthalten die Gleichungen A) und B) die beiden veränderlichen Parameter r und ξ, von denen sich aber nach A) der eine durch den andern ausdrücken lässt; die Gleichung B) kann daher so gestaltet werden, dass sie ausser x, y und etwaigen Konstanten nur ξ oder r enthält,

und dann ergiebt sich die Gleichung der Rollkurve durch Elimination von ξ bez. r aus der Gleichung B) und ihrem nach ξ bez. r genommenen partiellen Differentialquotienten.

Beispielsweise mag die Kurve bestimmt werden, die der Pol einer logarithmischen Spirale beschreibt, wenn sie auf der Aussenseite eines Kreises rollt. Hier ist

$$\eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}, \quad \theta = \mu\, l\left(\frac{r}{a}\right);$$

ferner nach A), wenn c eine willkürliche Konstante bezeichnet,

$$\sqrt{1 + \mu^2} \cdot r = a\left(c - a \cdot arccos\frac{\xi}{a}\right),$$

und nach B)

$$(x - \xi)^2 + (y - \sqrt{a^2 - \xi^2})^2 = \frac{1}{1 + \mu^2}\left(c - a \cdot arccos\frac{\xi}{a}\right)^2.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$arccos\frac{\xi}{a} = \omega, \quad \mu = tan\,\beta, \quad c = a\gamma,$$

so wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\omega - 2ay\sin\omega + a^2 = a^2(\omega - \gamma)^2\cos^2\beta,$$

und es ist nun ω als willkürlicher Parameter anzusehen, in Beziehung auf den die Differentiation giebt

$$x\sin\omega - y\cos\omega = a(\omega - \gamma)\cos^2\beta.$$

Um ω zu eliminieren und gleichzeitig von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten überzugehen, setze man

$$x = R\cos\Theta, \quad y = R\sin\Theta,$$

und gebe den beiden vorigen Gleichungen die Formen

$$\text{C)} \qquad \begin{cases} R\cos(\omega - \Theta) = \dfrac{R^2 + a^2 - a^2(\omega - \gamma)^2\cos^2\beta}{2a}, \\ R\sin(\omega - \Theta) = a(\omega - \gamma)\cos^2\beta. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate beider Gleichungen gestättet folgende Darstellung

$$4a^4(\omega - \gamma)^2\cos^2\beta\sin^2\beta = [R^2 - a^2 - a^2(\omega - \gamma)^2\cos^2\beta]^2;$$

diese liefert

$$(\omega - \gamma)\cos\beta \pm \sin\beta = \frac{\sqrt{R^2 - a^2\cos^2\beta}}{a},$$

oder nach Division mit $\cos\beta$ und wegen $tan\,\beta = \mu$

D) $$\omega - \gamma \pm \mu = \frac{\sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 \beta}}{a \cos \beta},$$

wobei rechter Hand nur das positive Zeichen zu nehmen ist, weil ω und R gleichzeitig wachsen. Multipliziert man ferner die zweite der Gleichungen C) mit $\mp \tan \beta = \mp \mu$ und addiert sie zur ersten, so erhält man

$$R \frac{\cos(\omega - \Theta \pm \beta)}{\cos \beta} = \frac{R^2 + a^2 - (\omega - \gamma \pm \mu)^2 a^2 \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta}{2a},$$

d. i. vermöge des Wertes von $\omega - \gamma \pm \mu$

$$R \frac{\cos(\omega - \Theta \pm \beta)}{\cos \beta} = a,$$

oder

$$\omega - \Theta \pm \beta = \operatorname{Arccos} \frac{a \cos \beta}{R}.$$

Zieht man diese Gleichung von D) ab, setzt zur Abkürzung $a \cos \beta = A$ und bezeichnet mit Γ eine willkürliche Konstante, so ergiebt sich

$$\Theta - \Gamma = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} - \operatorname{Arccos} \frac{A}{R};$$

die Rollkurve ist demnach die Evolvente eines mit dem Radius

$$A = \frac{a}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

beschriebenen Kreises.

Die vorige Methode hat die Unbequemlichkeit, dass sie die Rektifikation der Basis und der rollenden Kurve voraussetzt, und es ist daher meistenteils vorteilhafter, den Zusammenhang zwischen ξ, r, x und y durch Differentialgleichungen auszudrücken. Die Gleichung B) giebt nun durch partielle Differentiation nach ξ

$$x - \xi + (y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} + r \frac{dr}{d\xi} = 0;$$

ferner ist nach A)

$$\sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} \, . \, dr = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} \, . \, d\xi,$$

und wenn man den hieraus folgenden Wert von $\frac{dr}{d\xi}$ in die vorhergehende Gleichung substituiert, so folgt

$$\left[x - \xi + (y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi}\right] \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} + r \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = 0.$$

Man bemerke nun noch, dass sich im Punkte P die Rollkurve und derjenige von den eingehüllten Kreisen berühren, welcher PQ zum Radius und Q zum Mittelpunkte hat, dass mithin PQ nicht nur Normale dieses Kreises, sondern auch Normale der Rollkurve sein muss, also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\xi}{y-\eta}.$$

Unter Benutzung der abkürzenden Zeichen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta', \quad \frac{dr}{d\theta} = r', \quad \frac{dy}{dx} = p$$

lassen sich die drei hauptsächlichen Gleichungen folgendermassen schreiben

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2, \quad p = -\frac{x-\xi}{y-\eta},$$

$$\frac{x-\xi+(y-\eta)\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} + \frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}} = 0;$$

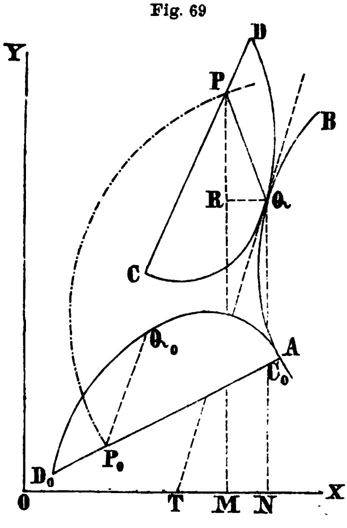
die beiden ersten geben

$$\text{E)} \qquad x-\xi = \mp\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y-\eta = \pm\frac{r}{\sqrt{1+p^2}},$$

und durch Substitution dieser Werte geht die dritte Gleichung über in

$$\text{F)} \qquad \pm\frac{r}{r'} = \frac{1+p\eta'}{p-\eta'}.$$

Fig. 69



Die Gleichungen E) und F) können direkt durch folgende einfache geometrische Überlegung gefunden werden. Da PQ Normale der Rollkurve ist (Fig. 69), so hat man

$$tan\, MPQ = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$sin\, MPQ = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$cos\, MPQ = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

mithin, wenn die Kurve CQD auf der Aussenseite von AQB rollt,

$$RQ = PQ \,.\, sin\, MPQ,$$

d. i.

$$x - \xi = - \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$RP = PQ . \cos MPQ, \quad \text{d.i.} \quad y - \eta = + \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Zieht man ferner die Gerade QT, welche sowohl die Basis als die rollende Kurve berührt, und setzt $\angle PQT = \varphi$, $\angle QTN = \tau$, so hat man

$$\tan \varphi = \frac{r}{r'}, \quad \tan \tau = \eta';$$

ferner

$$\varphi = \angle PQR + \angle RQT = \tfrac{1}{2}\pi - \angle MPQ + \tau,$$

$$\tan \varphi = \cot (MPQ - \tau) = \frac{1}{\tan (MPQ - \tau)},$$

d. i. vermöge der Werte von $\tan \varphi$, $\tan MPQ$ und $\tan \tau$

$$\frac{r}{r'} = \frac{1 + p\eta'}{p - \eta'}.$$

Falls die Kurve CQD auf der Innenseite von AQB rollt, ändert r sein Vorzeichen.

In den Gleichungen E) und F) lassen sich, wenn die Basis und die rollende Kurve gegeben sind, η durch ξ und r durch θ ausdrücken, so dass jene drei Gleichungen nur x, y, p, ξ und θ enthalten; durch Elimination von ξ und θ entsteht eine einzige Gleichung zwischen x, y, p, und diese ist die Differentialgleichung der Rollkurve. Bei geradliniger Basis ist, wenn dieselbe zur Abscissenachse genommen wird, $\eta = 0$, und dann einfacher

G) $$y = \pm \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \pm \frac{r}{r'} = \frac{1}{p},$$

wo es nur der Elimination von θ bedarf.

Die Gleichungen E) und F) dienen zweitens zur Lösung der Aufgabe, aus den Gleichungen der Basis und der Rollkurve die Polargleichung der rollenden Kurve herzuleiten. In diesem Falle sind nämlich y und p als Funktionen von x gegeben, η und η' als Funktionen von ξ, mithin können jene drei Gleichungen so dargestellt werden, dass nur r, r', x und ξ darin vorkommen. Nach Elimination von x und ξ bleibt eine Gleichung zwischen r und r' übrig, welche die Differentialgleichung der rollenden Kurve ist.

Endlich können die Gleichungen E) und F) benutzt werden, um die Basis zu finden, auf der eine gegebene Kurve rollen muss, wenn ein bestimmter Punkt in der Ebene der letzteren eine vorgeschriebene Rollkurve beschreiben soll. Drückt man in diesem Falle y und p durch x, sowie r und r' durch θ aus, so enthalten jene drei Gleichungen die Variabeln ξ, η, η', x, θ, und nach Elimination von x und θ bleibt die Differentialgleichung der Basis übrig.

Beispiele. 1. Man sucht die Kurve, die der Brennpunkt einer Parabel beschreibt, wenn sie auf einer Geraden rollt.

Bezeichnet a den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel, so ist

$$r = \frac{2a}{1+\cos\theta} = \frac{a}{\cos^2\frac{1}{2}\theta},$$

und die Gleichungen G) werden

$$y^2 = \frac{a^2}{1+p^2}\sec^4\tfrac{1}{2}\theta, \quad \tan^2\tfrac{1}{2}\theta = p^2;$$

daraus folgt die Differentialgleichung der Rollkurve

$$y^2 = a^2(1+p^2).$$

Das Integral derselben ist

$$l\left(\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{c}\right) = \frac{x}{a}.$$

Denkt man sich als primitive Stellung der Parabel diejenige, bei der die Achse senkrecht zur x-Achse, mithin der Brennpunkt am tiefsten liegt, so muss für $x=0$, $y=a$ werden; dies giebt $c=a$ und als Gleichung der Rollkurve

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

woraus hervorgeht, dass die Rollkurve eine Kettenlinie ist.

2. Eine hyperbolische Spirale rollt auf einer Geraden; man sucht die vom Pole der Spirale beschriebene Kurve.

Aus den Gleichungen G) erhält man wegen $r\theta = a$

$$x = \int\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy + c;$$

die erzeugte Rollkurve ist also die Traktorie eines mit dem Radius a konstruierten Kreises.

3. Eine Kreisevolvente rollt auf einer Geraden; man sucht die vom Pole der Evolvente beschriebene Kurve.

Da sich die Polargleichung der rollenden Kurve nicht auf r, wohl aber auf θ reduzieren lässt, nämlich

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - Arccos\,\frac{a}{r},$$

so behandelt man in den Gleichungen E) nicht θ, sondern r als unabhängige Variable, es ist dann

$$y^2 = \frac{r^2}{1 + p^2}, \quad \frac{r^2 - a^2}{a^2} = \frac{1}{p^2},$$

woraus folgt, dass die Rollkurve eine durch die Gleichung

$$y^2 = 2a(x + c)$$

charakterisierte Parabel ist.

4. Man sucht die Kurve, welche von dem Pole einer Kardioide beschrieben wird, die auf einer Geraden rollt.

Schreibt man die Polargleichung der rollenden Kurve in der Form

$$r = b\cos^2\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{oder} \quad \theta = 2\,Arccos\sqrt{\frac{r}{b}},$$

wo b den vierfachen Radius des erzeugenden Kreises bedeutet, so erhält man als Gleichung der Rollkurve

$$x - c = \int \frac{y^{\frac{1}{3}}\,dy}{\sqrt{b^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}.$$

Die noch erforderliche Integration lässt sich mittels der Substitution

$$b^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = z^2$$

ausführen, wodurch schliesslich entsteht

$$[(x - c)^2 + y^2 - 4b^2]^3 + 27b^2y^4 = 0.$$

Denkt man sich als anfängliche Stellung der Kardioide diejenige, bei welcher der Pol am höchsten liegt, so entsprechen einander die Anfangswerte $x = 0$ und $y = b$; daraus folgt $c = 0$ und in Polarkoordinaten

$$\sin^4\Theta = \frac{(4b^2 - R^2)^3}{27b^2R^4}.$$

5. Die Astroide, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist, rollt auf einer Geraden; man sucht die vom Mittelpunkte dieser Kurve beschriebene Kurve.

Die Gleichung der rollenden Kurve lässt sich durch die beiden Gleichungen ersetzen

$$x_1 = a\cos^3\omega, \quad y_1 = a\sin^3\omega,$$

oder in Polarkoordinaten

$$r^2 = a^2(\cos^6\omega + \sin^6\omega), \quad \tan\theta = \tan^3\omega;$$

die Gleichungen G) werden hiernach

$$y^2 = \frac{a^2(\cos^6\omega + \sin^6\omega)}{1+p^2}, \quad \tan^2 2\omega = \frac{4}{p^2},$$

und liefern durch Elimination von ω die Differentialgleichung

$$y^2(p^2+4) = a^2.$$

Durch Integration derselben ergiebt sich, dass die Rollkurve eine aus den Halbachsen $\frac{1}{4}a$ und $\frac{1}{2}a$ konstruierte Ellipse ist.

6. Eine logarithmische Spirale, deren Gleichung ist

$$\theta = \mu l\left(\frac{r}{b}\right),$$

rollt auf der Aussenseite eines durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2$$

bestimmten Kreises; man sucht die Rollkurve, die der Pol der Spirale beschreibt.

Die Gleichung F) giebt wegen $\eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$

$$\xi = \frac{a(1-\mu p)}{\sqrt{(1+\mu^2)(1+p^2)}};$$

ferner ist zufolge der Kreisgleichung

$$\eta = \frac{a(\mu + p)}{\sqrt{(1+\mu^2)(1+p^2)}},$$

und nachher wegen $x + yp = \xi + \eta p$

$$x + yp = A\sqrt{1+p^2}, \quad A = \frac{a}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung besteht für $p = \tan\tau$ aus den beiden Gleichungen

$$x = A(\cos\tau + \tau\sin\tau) - c\sin\tau,$$
$$y = A(\sin\tau - \tau\cos\tau) + c\cos\tau.$$

Für $x = R\cos\Theta$, $y = R\sin\Theta$ erhält man aus der Quadratsumme dieser Gleichungen

$$\tau - \frac{c}{A} = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A};$$

ferner giebt der Quotient $\frac{y}{x} = \tan\Theta$

$$\tau - \frac{c}{A} = \frac{\tan\tau - \tan\Theta}{1 + \tan\tau\tan\Theta} = \tan(\tau - \Theta),$$

mithin

$$\tau - \Theta = Arctan\left(\tau - \frac{c}{A}\right) = Arctan\frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} = Arccos\frac{A}{R},$$

und wenn man diese Gleichung von der zweitvorhergehenden abzieht, so bleibt

$$\Theta - \frac{c}{A} = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} - Arccos\frac{A}{R},$$

woraus hervorgeht, dass die Rollkurve als Evolvente eines mit dem Radius A beschriebenen Kreises betrachtet werden kann.

7. Man soll diejenige Kurve finden, welche durch Rollen auf einer Parabel eine gerade Linie erzeugt, die mit der Parabelachse zusammenfällt.

Benutzt man die Gleichungen

$$\eta = \sqrt{2h\xi}, \quad \eta' = \sqrt{\frac{h}{2\xi}}, \quad y = 0, \quad p = 0,$$

so gelangt man zu der Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm h,$$

welche zeigt, dass die rollende Kurve eine Archimedische Spirale und der beschreibende Punkt ihr Pol ist.

8. Man sucht diejenige Kurve, welche durch Rollen auf einer Parabel eine Gerade erzeugt, die mit der Scheiteltangente der Parabel zusammenfällt.

Aus den Gleichungen

$$\eta = \sqrt{k\xi}, \quad \eta' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\xi}}, \quad x = 0, \quad p = \infty$$

erhält man die Differentialgleichung

$$r\frac{d\theta}{dr} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{r}},$$

deren Integral ist

$$r = \frac{k}{(\theta - \gamma)^2}.$$

9. Auf welcher Kurve muss eine Ellipse rollen, wenn ein Brennpunkt derselben eine Gerade beschreiben soll?

Die Gleichung der Ellipse sei

$$r = \frac{b^2}{a - e\cos\theta}, \quad \text{mithin} \quad r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{b}{\sqrt{r(2a - r) - b^2}},$$

ferner die Gleichung der beschriebenen Geraden

$$y = a + e, \quad \text{mithin} \quad p = 0;$$

die Differentialgleichung der Basis wird dann

$$\frac{b\,d\eta}{\sqrt{2e\eta - \eta^2}} = d\xi,$$

und als Gleichung der Basis folgt hieraus

$$\eta = e\left(1 - \cos\frac{\xi - \alpha}{b}\right).$$

Setzt man die willkürliche Konstante $\alpha = 0$, so ist die primitive Lage der Ellipse diejenige, bei der ihre grosse Achse senkrecht auf der Basis steht.

10. Auf welcher Basis muss eine Kardioide rollen, wenn deren Pol eine Gerade beschreiben soll?

Aus den Gleichungen

$$r = b(1 + \cos\theta), \quad y = 0,$$

erhält man als Differentialgleichung der Basis

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{2b - \eta}{\eta}};$$

die Basis ist demnach eine Cykloide, deren erzeugender Kreis den Radius b hat.

Kapitel X.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

§ 48.

Die einfachsten Formen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Allgemeine Regeln. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q,$$

so hat man als allgemeines Schema einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$q = f(x, y, p).$$

In den einfacheren Fällen, wo rechter Hand nur eine oder zwei der Grössen x, y, p vorkommen, lässt sich die Integration der betreffenden Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Integration von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Die hierzu dienenden Operationen sind folgende.

Erste Form. Aus der Gleichung

$$q = f(x)$$

folgt wegen $q\,dx = dp$ durch einmalige Integration

$$p = \int f(x)\,dx + C;$$

und nachher, weil $p\,dx = dy$ ist,

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C_1,$$

oder

$$y = x\int f(x)\,dx - \int x\,f(x)\,dx + Cx + C_1.$$

Zweite Form. Differentialgleichungen von der Form

$$q = f(y)$$

werden auf die Weise integriert, dass man zunächst die Substitution

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

anwendet und in der nunmehrigen Gleichung

$$p \frac{dp}{dy} = f(y)$$

die Variabeln sondert; dies giebt als erstes Integral

$$p = \sqrt{C + 2\int f(y)\, dy}.$$

Vermöge der Bedeutung von p folgt hieraus als zweites Integral

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\, dy}} + C_1.$$

Dritte Form. Bei Differentialgleichungen von der Form

$$q = f(p)$$

benutzt man wieder die vorige Substitution, welche giebt

$$dx = \frac{dp}{f(p)}.$$

Daraus folgt einerseits unmittelbar

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C,$$

andrerseits, weil $dy = p\, dx$ ist,

$$y = \int \frac{p\, dp}{f(p)} + C_1.$$

Eliminiert man p aus den beiden letzten Gleichungen, so gelangt man zu der Integralgleichung zwischen x, y, C, C_1.

Vierte Form. Ist die Differentialgleichung von der Form

$$q = f(x, p),$$

so giebt man ihr zunächst die Gestalt

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

welche eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabeln x und p darstellt. Durch Integration dieser Gleichung erhält man p als Funktion von x, etwa

$$p = \varphi(x),$$

und nachher

$$y = \int \varphi(x)\, dx + Const.$$

Fünfte Form. Bei Differentialgleichungen von der Form

$$q = f(y, p)$$

benutzt man die für die zweite Form angegebene Substitution und erhält

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

d. h. eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und p. Das Integral derselben hat die Gestalt

$$p = \psi(y),$$

und hieraus folgt schliesslich

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y)} + Const.$$

Für alle Fälle möge noch bemerkt sein, dass das allgemeine Integral jeder Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei willkürliche Konstanten enthalten muss. Sind weniger willkürliche Konstanten vorhanden, so ist das Integral entweder ein partikuläres oder ein singuläres. Die Integrale der letzteren Art erhält man dadurch, dass man entweder bei der ersten oder bei der zweiten Integration statt des allgemeinen Integrals das etwa vorhandene singuläre Integral nimmt, welches nach der in § 41 IV angegebenen Vorschrift aufzusuchen ist.

Beispiele. 1. Man verlangt die Kurve, in der zwischen der Normale u, dem Krümmungsradius ϱ und einer gegebenen Konstanten h die Gleichung

$$\varrho = \frac{u^3}{h^2}$$

stattfindet.

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist

$$By^2 - B^2(x - c)^2 = h^2;$$

sie bedeutet eine Hyperbel, weil die willkürliche Konstante B nur positiv genommen werden kann.

2. Man sucht die Kurve, der die Eigenschaft zukommt

$$\varrho = -\frac{u^3}{h^2}.$$

Die Integralgleichung lässt sich in der Form

$$y^2 = 2h(x - c) + \varkappa(x - c)^2$$

darstellen und bedeutet irgend einen Kegelschnitt, dessen Hauptachse mit der x-Achse zusammenfällt und dessen Halbparameter $= h$ ist.

3. Die Kurve zu bestimmen, für welche die Relation gilt

$$\frac{u^3}{\varrho} = \frac{y^4}{a^2} \pm b^2.$$

Bezeichnen A und B willkürliche Konstanten, so findet sich als Gleichung der Kurve

$$y^2 = Ae^{\frac{2x}{a}} + Be^{-\frac{2x}{a}} + \sqrt{4AB \pm a^2 b^2}.$$

4. Die analoge Aufgabe

$$\frac{u^3}{\varrho} = -\frac{y^4}{a^2} \pm b^2$$

hat zur Auflösung

$$y^2 = A \cos\frac{2x}{a} + B \sin\frac{2x}{a} + \sqrt{A^2 + B^2 \mp a^2 b^2}.$$

5. Man sucht diejenige Kurve, bei der die Vertikalprojektion des Krümmungshalbmessers $= \frac{u^2}{h}$ ist.

Bezeichnen a und C willkürliche Konstanten, so ergiebt sich

$$x - a = \int \sqrt{\frac{y}{Cy - 2h}}\, dy,$$

oder, wenn $C = \frac{2h}{b}$ gesetzt wird,

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sqrt{y(y-b)}}{b} + l\left(\frac{\sqrt{y} + \sqrt{y-b}}{\sqrt{b}} \right) \right\}.$$

Die betreffende Kurve lässt sich auch durch folgende zwei Gleichungen bestimmen:

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right) \right\}, \quad y = b \sec^2\varphi.$$

6. Man sucht diejenige Kurve, bei der die Vertikalprojektion des Krümmungshalbmessers $= -\frac{u^2}{h}$ ist.

Wie vorhin ergiebt sich

$$x - a = \int \sqrt{\frac{y}{Cy + 2h}}\, dy,$$

wo C ebensowohl positiv als negativ genommen werden darf.

Im Falle $C = \frac{2h}{b}$ erhält man

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sqrt{y(y+b)}}{b} - l\left(\frac{\sqrt{y} + \sqrt{y+b}}{\sqrt{b}} \right) \right\},$$

oder

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\psi\right) \right\}, \quad y = b \tan^2\psi.$$

Für $C = 0$ entsteht das partikuläre Integral

$$x - a = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{2h}}.$$

Für $C = -\frac{2h}{b}$ ergiebt sich

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \arccos\sqrt{\frac{b-y}{b}} - \frac{\sqrt{y(b-y)}}{b} \right\},$$

oder

$$x - a = \sqrt{\frac{c^3}{h}}(\omega - \sin\omega), \quad y = c(1 - \cos\omega);$$

die Cykloide bildet einen speziellen Fall dieser Kurve.

7. Man sucht die Polargleichung derjenigen Kurve, bei welcher die von $\theta = \alpha$ an gerechnete Sektorenfläche in konstantem Verhältnisse zur Fläche des rechtwinkligen Dreiecks steht, dessen Katheten der Radiusvektor und die Polarsubnormale des Punktes $r\theta$ sind.

Bezeichnet man das gegebene Verhältnis mit $1:\mu$, so findet man mittels der Substitution $r^2 = R$

$$r^2 = Ae^{\lambda\theta} + Be^{-\lambda\theta}, \quad \lambda = \sqrt{2\mu},$$

wobei die willkürlichen Konstanten A und B an die Bedingung

$$Ae^{\alpha\lambda} - Be^{-\alpha\lambda} = 0$$

gebunden sind.

8. In einer Kurve gelte für den Krümmungsradius ϱ die leicht zu konstruierende Formel

$$\varrho = h \csc^3\tau,$$

wobei τ den Winkel zwischen der Abscissenachse und der Tangente im Punkte xy bezeichnet; man verlangt die Kurvengleichung.

Die gesuchte Linie ist durch die Gleichung

$$(y - b)^2 = 2h(a - x)$$

bestimmt und demnach eine Parabel.

9. Bei welcher Kurve ist die Vertikalprojektion des Krümmungshalbmessers konstant $= k$?

Die Gleichung der betreffenden Kurve lautet

$$y - b = k\,l\,sec\frac{x-a}{k}.$$

10. Bei einer durch den Koordinatenanfang gehenden Kurve sei der vom Koordinatenanfang ab gerechnete Bogen

$$s = \tfrac{3}{2} h\, sin^2 \tau;$$

man sucht die Gleichung der Kurve.

Der Differentialgleichung genügen die Werte

$$x = a - h\cos^3\tau, \quad y = b + h\sin^3\tau,$$

woraus folgt

$$(x-a)^{\frac{2}{3}} + (y-b)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}.$$

Um noch die beiden Nebenbedingungen zu erfüllen, muss $a = h$ und $b = 0$ genommen werden.

11. Eine Kurve berührt die Abscissenachse in einem Punkte, dessen Abscisse k ist; für den von demselben Punkte aus gerechneten Bogen gilt die Formel

$$s = \tfrac{1}{2} k \tau^2;$$

es soll die Natur dieser Kurve bestimmt werden.

Durch Integration der betreffenden Differentialgleichung findet man

$$x - a = k(\cos\tau + \tau\sin\tau), \quad y - b = k(\sin\tau - \tau\cos\tau),$$

oder, wenn

$$x - a = r\cos\theta, \quad y - b = r\sin\theta$$

gesetzt wird,

$$r^2 = k^2(1+\tau^2), \quad \theta = \tau - arctan\,\tau.$$

Die Kurve ist hiernach eine Kreisevolvente, wobei der übrigen Bedingungen wegen $a = 0$ und $b = 0$ genommen werden muss.

12. Man sucht diejenige Kurve, in der die Vertikalprojektion des Krümmungshalbmessers $= h + \frac{x^2}{h}$ ist.

Bezeichnen c und γ willkürliche Konstanten, so lautet die Gleichung der Kurve

$$y = \frac{x}{\gamma} - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} h\,l\left(\frac{h+\gamma x}{c}\right),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$y = \frac{a}{h}x - \frac{a^2 + h^2}{h} l\left(\frac{a + x}{b}\right).$$

Die spezielle Annahme $\gamma = 0$ liefert das partikuläre Integral

$$y - b = \frac{x^2}{2h}.$$

13. Die Kurve zu bestimmen, für die

$$\varrho = 2x \sec^2 \tau$$

ist. Das Integral der betreffenden Differentialgleichung ist

$$y - b = \left(\frac{x}{3a} - 1\right)\sqrt{ax};$$

die Kurve stimmt also mit der in Tl. I, S. 94 unter Nr. 7 betrachteten Kurve überein.

14. Die analoge Aufgabe:

$$\varrho = x \sec^2 \tau$$

hat folgende Auflösung

$$4by = x^2 - 2b^2 l\left(\frac{x}{a}\right).$$

15. Zur Bestimmung der Kurve, welcher die Eigenschaft

$$\varrho = 2x \csc \tau$$

zukommt, erhält man

$$y - b = \int \sqrt{\frac{x}{a - x}}\, dx,$$

oder für $x = a \sin^2 \frac{1}{2}\omega$ und $a = 2c$

$$x = c(1 - \cos \omega), \quad y - b = c(\omega - \sin \omega);$$

die Kurve ist demnach eine Cykloide.

16. Man sucht die Kurve, für welche die Gleichung gilt:

$$\varrho = 2\sqrt{hx} \,.\, \csc^2 \tau.$$

Hier lassen sich x und y folgendermassen darstellen

$$x = h(C - \csc \tau)^2, \quad y - b = 2h(\cot \tau + C l \tan \tfrac{1}{2}\tau),$$

woraus τ nötigenfalls eliminiert werden könnte.

17. Es wird die Kurve gesucht, worin der von $x = a$ an gerechnete Bogen gleich ist der Strecke, welche die Tangente im Endpunkte des Bogens von der Ordinatenachse abschneidet.

Unter Rücksicht auf die gegebene Nebenbedingung findet man

$$y = \frac{b}{2}\left\{1 + l\left(\frac{x}{a}\right)\right\} - \frac{a^2 + x^2}{4b}.$$

18. Bei einer durch den Koordinatenanfang gehenden Kurve ist der von demselben Punkte an gerechnete Bogen gleich dem Doppelten der Strecke, welche die Tangente im Endpunkte des Bogens von der Ordinatenachse abschneidet; man sucht die Gleichung der Kurve.

Mit Rücksicht auf die gegebenen Nebenbedingungen findet man

$$y = \left(1 - \frac{x}{3c}\right)\sqrt{cx}.$$

19. Eine Kurve schneidet die x-Achse in einem Punkte, dessen Abscisse $= a$ ist; der vom nämlichen Punkte aus gezählte Bogen gleicht der Projektion der Abscisse auf die Tangente am Bogenendpunkte; man sucht die zugehörige Kurve.

Letztere ist eine mit dem Parameter a konstruierte Kettenlinie.

20. Eine Kurve schneidet die x-Achse in einem Punkte, dessen Abscisse $= a$ ist, und von dem aus die Bögen gerechnet werden sollen; man verlangt die Kurve, deren Bogen gleich der Strecke ist, welche die Normale durch den Bogenendpunkt von der Ordinatenachse abschneidet.

Als Gleichung der Kurve findet sich

$$9ay^2 = (2a + x)^2(a - x).$$

21. Verfolgungskurve. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig in einer Parallelen zur y-Achse im Abstand a, ein anderer verfolgt ihn vom Koordinatenanfang aus mit n-mal so grosser Geschwindigkeit. Es ist die Bahn des verfolgenden Punktes zu bestimmen, wenn beide Punkte ihre Bewegung gleichzeitig in der x-Achse beginnen. Wenn der verfolgende Punkt in xy angelangt ist, sei der verfolgte in a, η. Da die Verbindungslinie beider Punkte Tangente an die Verfolgungskurve im Punkte xy sein muss, so hat man

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(a - x); \quad \frac{d\eta}{dx} = (a - x)\frac{d^2y}{dx^2};$$

ausserdem giebt das Verhältnis der Geschwindigkeiten die Gleichung

$$n\,d\eta = ds.$$

Also erhält man die Differentialgleichung der Verfolgungskurve:

$$n(a-x)\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die erste Integration giebt mit Rücksicht auf die Bedingung, dass $p=0$ für $x=0$ sein muss:

$$p=\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{n}}-\left(\frac{a}{a-x}\right)^{-\frac{1}{n}}\right\}.$$

Durch nochmalige Integration unter Beachtung der Bedingung, dass für $x=0$, $y=0$ wird, erhält man:

$$y-\frac{n}{n^2-1}a=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{a^{-\frac{1}{n}}(a-x)^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}-\frac{a^{\frac{1}{n}}(a-x)^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}\right\},\quad n\gtrless 1.$$

Im Falle $n=1$ giebt die Gleichung für p:

$$p=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{a-x}-\frac{a-x}{a}\right)$$

das Integral

$$y=\tfrac{1}{2}al\left(\frac{a}{a-x}\right)-\frac{x(2a-x)}{4a}.$$

22. Man sucht die Kurve, bei welcher der Krümmungsradius durch die Formel

$$\varrho=\frac{y}{\cos\tau\sin\tau}$$

bestimmt ist.

Die Gleichung der Kurve lautet

$$y^2=a\left(a+be^{-\frac{x}{a}}\right).$$

23. Es wird die Kurve verlangt, bei welcher die Horizontalprojektion des Krümmungshalbmessers mit der Subtangente zusammenfällt.

Der Aufgabe genügt die Traktorie der Geraden.

24. Es bezeiche O den Koordinatenanfang, P einen Kurvenpunkt, Q den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt, PT die Polartangente, PU die Porlarnormale; man sucht diejenige Kurve, bei

der sich die Flächen der Dreiecke OPQ und PTU wie $1:n$ verhalten.

Setzt man

$$\frac{dr}{d\theta}=p \quad \text{und} \quad \frac{d^2r}{d\theta^2}=\frac{dp}{d\theta}=p\frac{dp}{dr},$$

so erhält man eine homogene Differentialgleichung zwischen p und r, die sich mittels der gewöhnlichen Substitution $p=rt$ integrieren lässt. Nachher findet man für $n=1$:

$$r=ce^{\frac{1}{2}(\theta-\gamma)^2},$$

für $n>1$:

$$r^{n-1}=Ae^{m\theta}+Be^{-m\theta},\quad m=\sqrt{n-1},$$

und für $n<1$:

$$r^{n-1}=C\cos m(\theta-\gamma),\quad m=\sqrt{1-n}.$$

25. Man verlangt die Polargleichung derjenigen Kurve, in welcher der Krümmungshalbmesser das m-fache von der Projektion des Radiusvektor auf die Normale beträgt.

Die Gleichung der Kurve ist

$$\theta-\gamma=\int\sqrt{\frac{r^2+C}{(m-1)r^2-C}}\cdot\frac{dr}{r}.$$

Dem speziellen Falle $C=0$, $m>1$ entspricht als partikuläre Auflösung eine logarithmische Spirale; bei der allgemeinen Auflösung sind die Fälle $m=1$ (Kreisevolvente), $m>1$ und $m<1$ zu unterscheiden.

Für $m=2$, $C=a^2$ erhält man z. B.

$$\theta-\gamma=\tfrac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2}{r^2}\right)+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{r^2+a^2}+\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{r^2+a^2}-\sqrt{r^2-a^2}}\right),$$

oder

$$r=\frac{a}{\sqrt{\cos\omega}},\quad \theta-\gamma=\tfrac{1}{2}\{\omega+l\tan(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\omega)\}.$$

26. Es bezeichne u die Polarnormale und es werde die Kurve gesucht, welche die Eigenschaft besitzt

$$\varrho=-\frac{(h^2+r^2)u}{r^2}.$$

Als Integralgleichung findet man

$$\theta-\gamma=\tfrac{1}{2}\arccos\frac{C-h^2r^2}{r^2\sqrt{2C+h^4}},$$

oder

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\theta - \gamma)}{a^2} - \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{a^2 + h^2},$$

woraus hervorgeht, dass die Kurve eine Hyperbel ist.

27. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\varrho = u\varphi(r)$$

besteht die Lösung in folgenden zwei Gleichungen

$$\int \frac{dr}{r\varphi(r)} = \psi(r),$$

$$\theta - \gamma = \int \frac{dr}{r\sqrt{Cr^2 e^{-2\psi(r)} - 1}}.$$

28. Man sucht die Kurve, in welcher der Krümmungshalbmesser gleich dem Radiusvektor ist.

Mittels der Bemerkung, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - \frac{rt}{\sqrt{(1 + t^2)^3}} \cdot \frac{dt}{dr}$$

einen vollständigen Differentialquotienten darstellt, findet man

$$\theta - \gamma = \sqrt{\frac{r - a}{a}} - 2 \arccos \sqrt{\frac{a}{r}}$$

oder auch

$$r = a(1 + \omega^2), \quad \theta - \gamma = \omega - 2 \arctan \omega.$$

Die Kurve gehört zu den Spiralen und gestattet eine einfache Rektifikation, nämlich

$$s = \frac{r + 2a}{3} \sqrt{\frac{r - a}{a}}.$$

29. Die allgemeinere Aufgabe

$$\varrho = \varphi(r)$$

wird durch folgende Gleichungen gelöst

$$\int \frac{r\,dr}{\varphi(r)} = \psi(r),$$

$$\theta - \gamma = \int \frac{[\psi(r) - c]\,dr}{r\sqrt{r^2 - [\psi(r) - c]^2}}.$$

30. Man sucht diejenige Kurve, in welcher die Bögen proportional den Krümmungshalbmessern wachsen.

Aus der Gleichung

$$\varrho = \mu s$$

ergiebt sich durch Berücksichtigung der Relation $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$

$$s = c e^{\mu \tau}.$$

Differenziert man diese Gleichung und beachtet, dass ds ebensowohl $= sec\, \tau \,.\, dx$ als $= csc\, \tau \,.\, dy$ gesetzt werden kann, so gelangt man zu den beiden Gleichungen

$$x - a = \frac{c \mu e^{\mu \tau}(\mu \cos \tau + \sin \tau)}{\mu^2 + 1},$$

$$y - b = \frac{c \mu e^{\mu \tau}(\mu \sin \tau - \cos \tau)}{\mu^2 + 1}.$$

aus denen τ zu eliminieren ist. Es folgt aber

$$(x - a)^2 + (y - b^2) = \frac{c^2 \mu^2 e^{2\mu\tau}}{\mu^2 + 1},$$

und für $\mu = cot\, \varepsilon$

$$\frac{y - b}{x - a} = \tan(\tau - \varepsilon),$$

woraus hervorgeht, dass die gesuchte Kurve eine logarithmische Spirale ist.

31. Die allgemeinere Aufgabe

$$\varrho = f(s)$$

lässt sich ganz analog behandeln. Man erhält zunächst

$$\int \frac{ds}{f(s)} = \tau - \gamma,$$

und wenn man nach geschehener Integration hieraus s bestimmt, so entsteht eine Gleichung von der Form

$$s = \varphi(\tau);$$

diese führt zu den beiden Gleichungen

$$x - a = \int \varphi'(\tau) \cos \tau \, d\tau, \quad y - b = \int \varphi'(\tau) \sin \tau \, d\tau,$$

welche die gesuchte Kurve bestimmen.

Hiernach entspricht z. B. der Gleichung $\varrho^2 = 2hs$ eine Kreisevolvente, der Gleichung $\varrho^2 + s^2 = h^2$ eine Cykloide und der Gleichung $h(\varrho - h) = s^2$ eine Kettenlinie.

32. Man verlangt das Integral der Differentialgleichung

$$\left(x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \lambda^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{oder} \quad x^2q^2 + \lambda^2 = p^2,$$

worin λ eine gegebene Konstante bezeichnet.

Mit Hilfe der Substitution $q = \frac{dp}{dx}$ ergiebt sich als erstes Integral

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{c} + \frac{\lambda^2 c}{x}\right),$$

wozu noch das singuläre Integral $p = \lambda$ kommt. Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ist demnach

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2c} + \lambda^2 c\, l\left(\frac{x}{a}\right)\right\},$$

und ihr singuläres Integral

$$y = b + \lambda x.$$

33. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$h^2(2p - xq)q = x.$$

Als allgemeines Integral findet man

$$y = b + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{ch^2} + \tfrac{1}{3}cx^3\right),$$

und als singuläres Integral

$$y = b \pm \frac{x^2}{2h}.$$

34. Die Differentialgleichung

$$(p - xq)^2 + 2hq = 0$$

kann mittels der Substitution $p = x^m u$ bei zweckmässiger Wahl von m integriert werden; ihr allgemeines Integral ist

$$y - b = cx - \frac{c^2 x^3}{4h},$$

und ihr singuläres Integral

$$y = \frac{h}{2} l\left(\frac{x}{a}\right).$$

35. Als allgemeines Integral der Differentialgleichung

$$h(p + xq)^2 = h + xp$$

erhält man mittels der vorigen Substitution

$$y = \frac{x^2}{8h} - \frac{cx}{h} + \frac{c^2 - h^2}{h} l\left(\frac{x}{a}\right),$$

und als singuläres Integral

$$y = hl\left(\frac{a}{x}\right).$$

36. Mittels einer ähnlichen Substitution ergiebt sich, dass die Differentialgleichung

$$xp(p - xq)^2 + 4h^2 q = 0$$

folgendes allgemeine Integral besitzt

$$y - b = \pm h\left\{\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} + arcsin\,\frac{x}{a}\right\},$$

wozu noch das singuläre Integral kommt

$$y = \pm hl\left(\frac{x}{a}\right).$$

37. Die Differentialgleichung

$$p^2(p - xq)^2 = \frac{x^2}{h^2} - p^2$$

lässt sich wie die vorigen Differentialgleichungen behandeln und liefert als erstes Integral

$$x^2 - h^2 p^2 = h^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2,$$

und als zugehöriges singuläres Integral

$$(x^2 - h^2 p^2 - h^2)(x^2 - h^2 p^2) = 0.$$

Setzt man den ersten Faktor $= 0$, so erhält man dasselbe wie für $a = \infty$, mithin ein partikuläres Integral, dagegen führt $x^2 - h^2 p^2 = 0$ zu einem singulären Integrale. Demnach ist das allgemeine Integral der ursprünglichen Differentialgleichung

$$ah(y - b) = \pm \int \sqrt{(a^2 - h^2)x^2 + 2ah^2 x - a^2 h^2} \cdot dx,$$

worin behufs der Ausführung der Integration die Fälle $a^2 < h^2$, $a^2 = h^2$ und $a^2 > h^2$ zu unterscheiden sind. Der zweite Fall liefert das partikuläre Integral

$$9k(y - b)^2 = 4(x - k)^3, \quad k = \tfrac{1}{2}h.$$

Ausserdem existiert noch das singuläre Integral

$$2h(y - c) = \pm x^2.$$

38. Zur Integration der Differentialgleichung

$$hq(p^2 - yq) = p^2$$

kann man die Substitution $p = y^n u$ benutzen; man findet als allgemeines Integral

$$y = be^{\frac{x}{a}} - \frac{a^2}{h},$$

und als singuläres Integral

$$hy = (x - a)^2.$$

39. Für die Differentialgleichung

$$h^3 p q^3 = (p - 2xq)^2$$

erhält man als allgemeines Integral

$$9h^3(y - b)^2 = 32a^2(x - a)^3,$$

und als singuläres Integral

$$675h^3(y - b)^2 = 128x^5.$$

§ 49.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Allgemeine Regeln. I. Bezeichnen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegebene Funktionen von x allein, so ist

A) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + \psi(x)y = 0$$

das allgemeine Schema einer reduzierten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zur Integration derselben sind folgende Bemerkungen von Wert.

Hat man zwei verschiedene partikuläre Integrale y_1 und y_2 der Gleichung A) gefunden, so ist ihr allgemeines Integral

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten bedeuten.

So kann man in dem einfachen Falle, dass an Stelle der Funktionen φ und ψ Konstante treten, die Differentialgleichung also lautet:

B) $$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

zwei partikuläre Integrale von der Form e^{mx} finden, wenn man für m die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$m^2 + am + b = 0$$

nimmt, vorausgesetzt, dass $\frac{1}{4}a^2 - b \gtrless 0$, die beiden Wurzeln also verschieden sind. Man erhält daher als vollständiges Integral der Gleichung B):

$$y = e^{-\frac{1}{2}ax}(C_1 e^{\varkappa x} + C_2 e^{-\varkappa x}),$$

$$\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}, \quad \tfrac{1}{4}a^2 - b > 0;$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}ax}(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x),$$

$$\mu = \sqrt{b - \tfrac{1}{4}a^2}, \quad \tfrac{1}{4}a^2 - b < 0.$$

Im Falle $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, wenn also die beiden Wurzeln einander gleich sind, hat man ausser dem partikulären Integral e^{mx} noch das zweite xe^{mx}, es ist also in diesem besonderen Falle das allgemeine Integral der Gleichung B):

$$y = e^{-\frac{1}{2}ax}(C_1 + C_2 x), \quad \tfrac{1}{4}a^2 - b = 0.$$

Auch in dem allgemeinen Falle A) erhält man zwei partikuläre Integrale, wenn es gelingt $y = F(x, m)$ so zu bestimmen, dass man eine quadratische Gleichung für m erhält, die unabhängig von x ist und zwei verschiedene Wurzeln hat.

Hat man nur ein partikuläres Integral y_1, der Gleichung A) gefunden, so ergiebt sich das allgemeine:

$$y = y_1\left(C_1 + C_2 \int \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int \varphi(x)\,dx}\right).$$

Zuweilen lässt sich die Gleichung A) integrieren, wenn man für y eine Funktion von x substituiert und deren Parameter in geeigneter Weise bestimmt.

Nicht selten gelangt man zur Integralgleichung von A), wenn man für y eine neue Variable z mittels der Substitution

$$y = z\,e^{-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\,dx}$$

einführt; dadurch geht A) in die Differentialgleichung für z:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \{\tfrac{1}{4}[\varphi(x)]^2 + \tfrac{1}{2}\varphi'(x) - \psi(x)\}z$$

über, die von der einfacheren Form

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(x) \cdot z = 0$$

ist.

II. Die Integration der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{C)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi(x) \frac{dy}{dx} + \psi(x) y = f(x)$$

ist ausführbar, wenn man irgend ein partikuläres Integral η derselben und das allgemeine Integral y_0 der reduzierten Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi(x) \frac{dy}{dx} + \psi(x) y = 0$$

kennt; es ist dann das allgemeine Integral von C)

$$y = y_0 + \eta.$$

Ein partikuläres Integral kann man durch Variation der Konstanten ermitteln, wenn man zwei verschiedene partikuläre Integrale y_1 und y_2 der reduzierten Gleichung kennt; das allgemeine Integral von C) ergiebt sich dann

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int \frac{f(x)\,dx}{y_2 D\left(\frac{y_1}{y_2}\right)} + y_2 \int \frac{f(x)\,dx}{y_1 D\left(\frac{y_1}{y_2}\right)},$$

wobei D den in Beziehung auf x genommenen Differentialquotienten bedeutet.

Beispiele. 1. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

2. $$\frac{d^2 y}{dx^2} - \mu^2 y = 0, \quad y = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}.$$

3. $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2 y = 0, \quad y = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x.$$

4. $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y = e^x (C_1 + C_2 x).$$

5. Von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{\beta}{x^2}y = 0$$

kann man durch die Substitution $y = x^m$ zwei partikuläre Integrale finden. Man hat für m die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$m^2 + (\alpha - 1)m + \beta = 0$$

zu setzen, vorausgesetzt, dass sie verschieden sind. Je nachdem

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - 1)^2 - \beta \gtrless 0$$

ist, erhält man daher als allgemeines Integral

$$y = x^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}(C_1 x^{\varkappa} + C_2 x^{-\varkappa}), \quad \varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\alpha-1)^2 - \beta},$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}\{C_1 \cos(\mu l x) + C_2 \sin(\mu l x)\} \quad \mu = \sqrt{\beta - \tfrac{1}{4}(\alpha-1)^2}.$$

Im Falle $\frac{1}{4}(\alpha-1)^2 - \beta = 0$ erhält man nur das eine partikuläre Integral

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}$$

und daraus das allgemeine Integral

$$y = x^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}(C_1 + C_2 l x).$$

Z. B. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x^2}y = 0, \quad y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}.$

Ein geometrisches Beispiel hierzu bietet die Aufsuchung der Kurve, für welche

$$\int y\,dx = \frac{x(y - x \tan\tau)}{m}$$

ist. Man erhält

$$y = C_1 x^{\sqrt{1-m}} + C_2 x^{-\sqrt{1-m}}, \qquad m < 1,$$

$$y = b\,l\left(\frac{x}{a}\right), \qquad m = 1,$$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{m-1}\cdot lx) + C_2 \sin(\sqrt{m-1}\cdot lx), \quad m > 1.$$

6. Versucht man der Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\varkappa x\frac{dy}{dx} + [\varkappa(\varkappa - 1) - \lambda^2 x^2]y = 0$$

durch einen Ausdruck von der Form $y = x^m e^{nx}$ zu genügen, so er-

hält man zwei partikuläre Integrale, wenn man $m = -\varkappa$, $n = \pm\lambda$ setzt, daher ist das allgemeine Integral

$$y = x^{-\varkappa}(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}).$$

Ebenso hat die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2\varkappa x \frac{dy}{dx} + [\varkappa(\varkappa - 1) + \mu^2 x^2]\, y = 0$$

das allgemeine Integral

$$y = x^{-\varkappa}(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x).$$

7. Der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\beta x \frac{dy}{dx} + (\alpha + \beta^2 x^2)\, y = 0$$

kann man durch einen Ausdruck von der Form $y = e^{mx + nx^2}$ genügen; man erhält, vorausgesetzt, dass $\alpha \gtrless \beta$ ist: $m^2 = \beta - \alpha$ und $n = -\frac{1}{2}\beta$, also ergiebt sich das allgemeine Integral

$$y = e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}), \qquad \lambda = \sqrt{\beta - \alpha}, \quad \alpha < \beta,$$
$$y = e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x), \quad \mu = \sqrt{\alpha - \beta}, \quad \alpha > \beta.$$

Im Falle $\alpha = \beta$ erhält man ein partikuläres Integral und daraus das allgemeine

$$y = e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}(C_1 + C_2 x).$$

8. Die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta x) \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

hat als partikuläres Integral $y_1 = \alpha + \beta x$, daraus ergiebt sich das allgemeine

$$y = (\alpha + \beta x) \left\{ C_1 + C_2 \int \frac{1}{(\alpha + \beta x)^2} x^\alpha e^{\beta x} dx \right\}.$$

Mittels partieller Integration ergiebt sich noch

$$y = C_1(\alpha + \beta x) + C_2 \{ x^\alpha e^{\beta x} - (\alpha + \beta x) \int x^{\alpha - 1} e^{\beta x} dx \}.$$

9. Das vorige partikuläre Integral genügt auch der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta x) \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

und führt zu dem allgemeinen Integrale

$$y = C_1(\alpha + \beta x) + C_2 \left\{ x^\beta e^{-\frac{\alpha}{x}} - (\alpha + \beta x) \int x^{\beta - 2} e^{-\frac{\alpha}{x}} dx \right\}.$$

10. Für die Differentialgleichung

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta x)\frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

erhält man auf gleiche Weise, wenn man von der Abkürzung

$$\int \frac{\alpha + \beta x}{f(x)}\,dx = X$$

Gebrauch macht, das allgemeine Integral

$$y = C_1(\alpha + \beta x) + C_2\left\{e^X - (\alpha + \beta x)\int \frac{1}{f(x)}\,e^X\,dx\right\}.$$

11. Um die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + \beta x)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\,xy = 0$$

zu integrieren, versuche man, ob derselben die Exponentialgrösse $e^{\lambda x}$ genügen kann, wenn die Konstante λ zweckmässig bestimmt wird. Man gelangt hierdurch zu einem partikulären Integrale, aus dem das allgemeine Integral folgt

$$y = e^{-\alpha x}\{C_1 + C_2\int e^{\alpha x - \frac{1}{2}\beta x^2}\,dx\}.$$

12. Für die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + \beta x)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\,y = 0$$

erhält man nach demselben Verfahren das allgemeine Integral

$$y = e^{-\beta x}\{C_1 + C_2\int x^{-\alpha}\,e^{\beta x}\,dx\}.$$

Falls α eine negative ganze Zahl ist, kann die angedeutete Integration leicht ausgeführt werden.

13. Der Differentialgleichung

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\mu - 1)x\frac{dy}{dx} - \mu(\mu - 1)y = 0$$

genügt als partikuläres Integral eine Potenz von der Form $(A + Bx)^\mu$, wenn A und B zweckmässig bestimmt werden; das allgemeine Integral ist

$$y = (a + x)^\mu\left\{C_1 + C_2\int \frac{(a - x)^{\mu-1}}{(a + x)^{\mu+1}}\,dx\right\}.$$

14. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = \frac{a}{x}$$

hat das partikuläre Integral $\eta = \frac{a}{\mu^2 x}$, die reduzierte Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0$$

hat nach Nr. 6 das allgemeine Integral

$$y_0 = x^{-1}(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x),$$

folglich hat die gegebene Gleichung das allgemeine Integral

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \frac{a}{\mu^2}\right).$$

15. Als allgemeine Lösung der Aufgabe

$$\int y\, dx = \tfrac{4}{3} x (y - x \tan \tau) + F(x)$$

findet man

$$y = C_1 \sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}}{8}\int \frac{F(x)}{\sqrt{x^5}}\, dx - \frac{3}{8\sqrt{x}}\int \frac{F(x)}{\sqrt{x^3}}\, dx.$$

16. Für die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (1 + \lambda x)\frac{dy}{dx} + \lambda y = \mu x^2$$

erhält man als allgemeines Integral

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2(1 + \lambda x) - \frac{\mu}{\lambda} x^2.$$

17. Der Differentialgleichung

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{4} y = bx$$

entspricht das Integral

$$y = C_1 \sqrt{a + x} + C_2 \sqrt{a - x} - \tfrac{4}{3} b x.$$

18. Für die allgemeinere Differentialgleichung

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{4} y = F(x)$$

erhält man als Integral

$$y = \sqrt{a + x}\left\{C_1 + \frac{1}{a}\int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{a + x}}\right\}$$
$$+ \sqrt{a - x}\left\{C_2 - \frac{1}{a}\int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{a - x}}\right\}.$$

19. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$$

liefert aus den partikulären Integralen $\cos x$, $\sin x$ der reduzierten Gleichung ein partikuläres Integral $\eta = -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x$, mithin ist ihr allgemeines Integral

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

20. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin^2 x$$

hat das allgemeine Integral

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x.$$

21. Für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = f(x)$$

erhält man das allgemeine Integral

$$y = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x - \frac{\cos \mu x}{\mu}\int f(x) \sin \mu x \, dx + \frac{\sin \mu x}{\mu}\int f(x) \cos \mu x \, dx.$$

22. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

ergiebt das allgemeine Integral

$$y = e^x (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2).$$

§ 50.

Homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Allgemeine Regeln. I. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung wird homogen genannt, wenn sie unter der Form

$$\text{A)} \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}\right) \quad \text{oder} \quad xq = F\left(p, \frac{y}{x}\right)$$

enthalten ist. Dieselbe lässt sich nach folgender Methode auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

Man setze

$$\frac{y}{x} = z, \quad x = e^t,$$

so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} + z,$$

also

B) $$dt = \frac{dz}{p - z}.$$

Ferner hat man

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} = x \,.\, q = F(p, z),$$

folglich wegen B)

C) $$\frac{dp}{dz} = \frac{F(p, z)}{p - z}.$$

Durch Integration dieser Differentialgleichung entsteht ein Resultat von der Form $p = \varphi(z)$, d. i.

$$\frac{dz}{dt} + z = \varphi(z);$$

diese neue Differentialgleichung liefert

D) $$l\left(\frac{x}{c}\right) = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z},$$

und wenn hier nach ausgeführter Integration $z = \dfrac{y}{x}$ eingesetzt wird, so kommt die gesuchte Integralgleichung zum Vorschein.

Wenn sich das Integral der Differentialgleichung C) nicht in der vorausgesetzten, wohl aber in der inversen Form $z = \psi(p)$ darstellen lässt, so ist nach B)

$$dt = \frac{\psi'(p)\, dp}{p - \psi(p)} = \left\{\frac{1}{p - \psi(p)} - \frac{1 - \psi'(p)}{p - \psi(p)}\right\} dp,$$

mithin durch Integration

E) $$l\left(\frac{x}{c}\right) = \int \frac{dp}{p - \psi(p)} - l[p - \psi(p)],$$

woraus x als Funktion von p, etwa

F) $$x = \chi(p)$$

erhalten wird. Ferner ist $y = xz$, d. i.

G) $$y = x\psi(p).$$

Eliminiert man p aus den Gleichungen F) und G), so gelangt man zu der gesuchten Integralgleichung.

Noch mögen zwei Fälle Erwähnung finden, in denen die Gleichung C) allgemein integriert werden kann.

a) Ist erstens die Gleichung A von der Form

$$\text{H)} \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) \quad \text{oder} \quad xq = f(p - z),$$

so geht die Gleichung C) über in

$$\frac{dp}{dz} = \frac{f(p-z)}{p-z};$$

für $p - z = s$ wird hieraus

$$1 + \frac{ds}{dz} = \frac{f(s)}{s} \quad \text{oder} \quad dz = \frac{s\,ds}{f(s) - s},$$

mithin durch Integration und unter Rücksicht auf die Bedeutung von z

$$\frac{y}{x} = A + \int \frac{s\,ds}{f(s) - s}.$$

Ferner ist nach B)

$$dt = \frac{dz}{s} = \frac{ds}{f(s) - s},$$

mithin

$$lx = B + \int \frac{ds}{f(s) - s}.$$

Die beiden für $y : x$ und lx gefundenen Gleichungen, aus denen sich möglicherweise s eliminieren lässt, enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe.

b) Ist zweitens die Gleichung A) von der Form

$$\text{J)} \qquad \frac{x^2}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{oder} \quad xq = zf\left(\frac{p}{z}\right),$$

so wird die Differentialgleichung C) homogen und lässt sich mittels der gewöhnlichen Substitution $\frac{p}{z} = u$ integrieren. Zunächst erhält man

$$\frac{dz}{z} = \frac{(u-1)\,du}{f(u) + u - u^2},$$

und durch Integration mit Rücksicht auf den Wert $z = \frac{y}{x}$

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = C + \int \frac{(u-1)\,du}{f(u) + u - u^2}.$$

Ferner ist nach B) und dem Vorigen

$$dt = \frac{dz}{p-z} = \frac{1}{u-1} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{du}{f(u) + u - u^2},$$

und durch Integration

K) $$lx = A + \int \frac{du}{f(u) + u - u^2}.$$

Addiert man hierzu die Gleichung für $l\left(\frac{y}{x}\right)$, so folgt

L) $$ly = B + \int \frac{u\,du}{f(u) + u - u^2}.$$

Die beiden letzten Gleichungen, aus denen möglicherweise u eliminiert werden kann, enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe.

II. In manchen der Fälle, wo die Gleichung C) nicht unmittelbar integrabel ist, empfiehlt es sich, statt x und y zwei neue Variable ξ und η einzuführen mittels der Gleichungen

M) $$x = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad y = \xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta,$$

aus denen folgt

$$\frac{dy}{dx} = \xi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 1 : \frac{d^2\eta}{d\xi^2}.$$

Die Gleichung A) verwandelt sich dadurch in

N) $$F\left(\xi, \xi - \frac{\eta}{\eta'}\right) \cdot \eta'' = \eta',$$

welche nicht selten integriert werden kann. Die Gleichungen M) und N) liefern dann x und y ausgedrückt durch ξ oder η.

Beispiele. 1. Es wird diejenige Kurve gesucht, bei welcher zwischen dem Radiusvektor r, seiner Projektion r^* auf die Normale und dem Krümmungshalbmesser ϱ die Gleichung $r^* \varrho = r^2$ stattfindet.

Die Differentialgleichung C) kann in diesem Falle direkt integriert werden und liefert

$$p = \frac{A - z}{1 + Az};$$

die gesuchte Kurve ist demnach eine durch die Gleichung

$$x^2 + 2Cxy - y^2 = K$$

bestimmte gleichseitige Hyperbel.

2. Man verlangt die Kurve, bei welcher die Relation $\eta\varrho = xy$ gilt, wenn η die Ordinate des Fusspunktes der vom Koordinatenanfang auf die Tangente herabgelassenen Senkrechten bedeutet.

Als Gleichung der Kurve findet sich

$$\beta(\beta - 2)y^2 = x^2 + \alpha x^\beta,$$

wobei die willkürliche Konstante β verschieden von 2 sein muss. Dem speziellen Falle $\beta = 2$ entspricht das partikuläre Integral

$$y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 l\left(\frac{a}{x}\right).$$

3. Die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha + \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}$$

hat zum Integral

$$y = x\{A + Blx + \tfrac{1}{2}\alpha(lx)^2\}.$$

4. Für die allgemeinere Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha + \beta\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)$$

ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass β von der Einheit verschieden ist,

$$y = Ax + Bx^\beta - \frac{\alpha x}{\beta - 1}lx.$$

Im Falle $\beta = 1$ kommt man auf Nr. 3 zurück.

5. Als Integral der Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)^2$$

findet man

$$y = x\left\{C + \mu l\left(\frac{x}{c + x}\right)\right\}.$$

6. Die Differentialgleichung

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \varkappa\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

hat zum allgemeinen Integral

$$ly = A + Blx + \tfrac{1}{2}\varkappa(lx)^2.$$

7. Unter der Voraussetzung, dass $\lambda + 1$ von Null verschieden ist, entspricht der Differentialgleichung

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \varkappa\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \lambda\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

das allgemeine Integral

$$ly = A + Bx^{1+\lambda} - \frac{\varkappa}{1+\lambda}lx.$$

Für $\lambda = -1$ kommt man auf den in Nr. 3 betrachteten Fall zurück.

8. Bei der Integration der Differentialgleichung

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \varkappa\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \lambda\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + \mu\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

in welcher $\mu \gtrless 1$ sein möge, hat man die drei Fälle zu unterscheiden, ob der Ausdruck

$$\varkappa(1-\mu) + \tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2$$

positiv, Null oder negativ ist. Im ersten Falle ergiebt sich

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\lambda)}(Ax^{\varepsilon} + Bx^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon = \sqrt{\varkappa(1-\mu) + \tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2};$$

im zweiten ist

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\lambda)}(A + Blx), \quad \varkappa(1-\mu) + \tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2 = 0;$$

im dritten Falle erhält man

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\lambda)}\{A\cos(\varepsilon lx) + B\sin(\varepsilon lx)\}; \quad \varepsilon = \sqrt{\varkappa(\mu-1) - \tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2}.$$

9. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$y\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx}.$$

Der Gleichung C) lässt sich dann die leicht integrable Form erteilen

$$\frac{dz}{dp} - \frac{z}{p} - z^2 = 0;$$

diese liefert für x und y die beiden Gleichungen

$$lx = C_1 - \frac{2}{C+2}lp + l(p^2 + C) - \frac{C+1}{C+2}l(p^2 + C + 2),$$

$$y = -\frac{2xp}{p^2 + C},$$

aus denen p eliminiert werden kann. Für $C = -1$ erhält man z. B.

$$y^2 = 4a(a-x).$$

Im Falle $C = -2$ ist die Formel für lx nicht anwendbar, vielmehr hat man in diesem Falle das folgende partikuläre Gleichungssystem

$$lx = C_1 + \frac{1}{p^2} + l\left(1 - \frac{2}{p^2}\right), \quad y = \frac{2xp}{2 - p^2}.$$

10. Das Integral der Differentialgleichung

$$x\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = 0$$

lässt sich, wenn $C - 2lp = \omega^2$ gesetzt wird, durch folgende zwei Gleichungen ausdrücken

$$x = ae^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2}, \quad y = b\omega e^{\omega}.$$

11. Als Integral der Differentialgleichung

$$x\left[y^2 + xy\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2} + y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

erhält man auf ähnliche Weise

$$x = ae^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3}, \quad y = b\omega e^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2}.$$

12. Der Differentialgleichung

$$(\alpha x + \beta y)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad xq = \frac{p}{\alpha + \beta z}$$

entspricht nach C)

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p}{(p - z)(\alpha + \beta z)},$$

welche Gleichung keine einfache Integration gestattet. Durch Anwendung der in M) angegebenen Substitutionen kommt man auf die Differentialgleichung

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - (\alpha + \beta\xi)\frac{d\eta}{d\xi} + \beta\eta = 0,$$

deren Integral nach § 49 Nr. 8 ist

$$\eta = C_1(\alpha + \beta\xi) + C_2\left\{\xi^\alpha e^{\beta\xi} - (\alpha + \beta\xi)\int\xi^{\alpha-1}e^{\beta\xi}d\xi\right\}.$$

Das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung wird also dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$x = A\beta + B\int\xi^{\alpha-1}e^{\beta\xi}d\xi,$$
$$y = -A\alpha + B\int\xi^{\alpha}e^{\beta\xi}d\xi.$$

Beispielsweise ergiebt sich für $\alpha = 1$

$$y = \frac{1}{\beta}\left\{(x-a)l\left(\frac{x-a}{b}\right) - x\right\}.$$

13. Auf ganz gleiche Weise gelangt man zum Integral der allgemeineren Gleichung

$$(\alpha x + \beta y)\frac{d^2 y}{dx^2} - f\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

indem man nach Einführung von ξ und η die Angabe von Nr. 10 in § 49 beachtet.

14. Nach der vorigen Methode lässt sich die Differentialgleichung

$$\left\{\mu^2 y + (1-\mu^2)x\frac{dy}{dx}\right\}\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

auf die folgende reduzieren

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} - \left(\frac{\mu}{\xi}\right)^2\eta = 0.$$

Diese ist nach § 49 Nr. 5 integrabel und liefert

$$x = \mu(C_1\xi^{\mu-1} + C_2\xi^{-\mu-1}),$$

$$y = (\mu-1)C_1\xi^{\mu} + (\mu+1)C_2\xi^{-\mu}.$$

15. Die Differentialgleichung

$$\left\{x + \lambda y + \mu\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

kommt zurück auf

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - (1+\lambda\xi)\frac{d\eta}{d\xi} + \lambda\eta = \mu\xi^2;$$

aus dieser ergiebt sich nach § 49 Nr. 16

$$x = \lambda(A + Be^{\lambda\xi}) - \frac{2\mu}{\lambda}\xi,$$

$$y = -A + B(\lambda\xi - 1)e^{\lambda\xi} - \frac{\mu}{\lambda}\xi^2.$$

§ 51.

Funktionalgleichungen.

Allgemeine Bemerkung. Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mehrere Werte der unabhängigen Variabeln x, und $y_1, y_2, y_3, \ldots$ die zugehörigen Werte der unabhängigen Variabeln y, so kann die Aufgabe gestellt werden, die Funktion $y = f(x)$ so zu bestimmen, dass einer gegebenen Gleichung zwischen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine gleichfalls

gegebene Gleichung zwischen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ entspricht, dass also zwei Gleichungen von den Formen

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(y_1, y_2, y_3, \ldots) = 0$$

simultan stattfinden. Derartige Aufgaben führen auf **Funktionalgleichungen**, die sich nicht selten in Differentialgleichungen umwandeln lassen, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

Beispiele. 1. Eine Kurve besitzt die Eigenschaft, dass irgend drei in arithmetischer Proportion stehenden Abscissen drei in geometrischer Proportion stehende Ordinaten entsprechen; man sucht die Gleichung der Kurve.

Die beiden, vorhin mit φ und ψ bezeichneten Gleichungen sind hier

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_3 = \sqrt{y_1 y_2};$$

setzt man $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, so geht die Gleichung $y_3 = \sqrt{y_1 y_2}$ nach Substitution des Wertes von x_3 in die folgende Funktionalgleichung über

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}.$$

Um sie zu vereinfachen, nehme man die Logarithmen und setze

$$l f(x) = F(x);$$

es ist dann

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\{F(x_1) + F(x_2)\}.$$

Für $x_1 = x$, $x_2 = x + 2h$ wird hieraus

$$F(x + h) = \tfrac{1}{2}\{F(x) + F(x + 2h)\}.$$

oder

$$\frac{F(x + 2h) - 2F(x + h) + F(x)}{h^2} = 0.$$

Geht man in dieser für jedes x und h geltenden Gleichung zur Grenze für unendlich abnehmende h über, so erhält man die Differentialgleichung

$$F''(x) = 0,$$

deren Integral ist $F(x) = \alpha + \beta x$. Die gesuchte Funktion ist also

$$f(x) = e^{F(x)} = a e^{\beta x},$$

und $y = a e^{\beta x}$ die Gleichung der verlangten Kurve.

2. Man sucht diejenige Funktion, bei welcher drei in arithmetischer Proportion stehenden Argumenten drei in harmonischer Proportion stehende Funktionswerte entsprechen.

Die Funktionalgleichung ist in diesem Falle

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{2f(x_1)f(x_2)}{f(x_1)+f(x_2)};$$

sie kann mittelst der Substitution $f(x)=\frac{1}{F(x)}$ vereinfacht werden, wodurch man erhält

$$f(x)=\frac{1}{A+Bx}.$$

3. Es wird diejenige Funktion gesucht, bei welcher drei in harmonischer Proportion stehenden Argumenten drei in geometrischer Proportion stehende Funktionswerte entsprechen.

Um die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)=\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$$

zu vereinfachen, setze man $x=\frac{1}{\xi}$ und bezeichne $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ mit $F(\xi)$; man kommt dann auf den in Nr. 1 erörterten Fall zurück, wodurch entsteht

$$f(x)=be^{\frac{a}{x}}.$$

4. Man verlangt diejenige Funktion, welcher die Eigenschaft zukommt

$$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=\mu f(x_1)\cdot f(x_2).$$

Für $x_2=0$ erhält man den Spezialwert

$$f(0)=\frac{2}{\mu};$$

ferner ist für $x_1=x+h$, $x_2=h$

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=\frac{\mu f(h)-2}{h^2}f(x+h).$$

Lässt man h gegen die Null konvergieren, so erhält man linker Hand $f''(x)$, rechter Hand $\frac{0}{0}f(x)$, wobei der Wert von $\frac{0}{0}$ zwar nicht bekannt, aber entschieden unabhängig von x, d. h. irgend eine Konstante k ist. Die Integration der entstehenden Differentialgleichung giebt

$$f(x)=Ae^{x\sqrt{k}}+Be^{-x\sqrt{k}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die ursprüngliche Funktionalgleichung, so findet man $A=B=\frac{1}{\mu}$, mithin

$$f(x)=\frac{1}{\mu}\left(e^{x\sqrt{k}}+e^{-x\sqrt{k}}\right).$$

Da k ebensowohl positiv wie negativ sein kann, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen, nämlich

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{\mu} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{2}{\mu} \cos \beta x,$$

wobei a und β beliebig sind.

5. Welcher Funktion kommt, beliebige x und h vorausgesetzt, die folgende Eigenschaft zu

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{\varkappa + f(x+2h)}{\varkappa + f(x)},$$

wobei $\varkappa$ eine gegebene Konstante bezeichnet?

Subtrahiert man beiderseits die Einheit und dividiert mit h^2, so hat man

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \frac{2}{\varkappa + f(x)} \cdot \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

durch Übergang zur Grenze für verschwindende h folgt hieraus eine Differentialgleichung, deren Integral ist

$$f(x) = \frac{2}{A + Bx} - \varkappa.$$

6. Es soll die Funktion $f(x)$ so bestimmt werden, dass die Gleichung

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{f(x+h) - f(x)} = \sqrt{\frac{1 + [f(x+2h)]^2}{1 + [f(x)]^2}}$$

für beliebige x und h stattfindet.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren findet man

$$f(x) = \tan(\alpha + \beta x),$$

worin α und β willkürliche Konstanten bezeichnen.

Auf gleiche Weise lässt sich auch die allgemeinere Funktionalgleichung

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{f(x+h) - f(x)} = \left[\frac{\varkappa + [f(x+2h)]^m}{\varkappa + [f(x)]^m}\right]^n$$

behandeln. Für $f(x) = y$ gelangt man nämlich zu einer Differentialgleichung, deren Integral ist

$$A + B \int \frac{dy}{(\varkappa + y^m)^{2n}} = x,$$

so dass hier $y = f(x)$ als Umkehrung einer Gleichung von der Form $F(y) = x$ bestimmt wird.